1°) a) Pour x réel et $n \geq 1$, $u_n(x) = \dfrac{u_{n-1}^2(x)}{n} \geq 0$, de plus $u_1(x) = u_0^2(x) = x^2 = (-x)^2 = u_1(-x)$ puis par une récurrence simple pour tout $n \geq 1, u_n(x) = u_n(-x)$.

Supposons $x \neq 0$ et montrons par récurrence que pour tout entier n, $u_n(x) \neq 0$. C'est donc vrai pour $n = 0$ et si $u_n(x) \neq 0$, alors $u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n^2(x)}{n+1} \neq 0$.

b) Soit $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, x < y$ *i.e.* $u_0(x) < u_0(y)$

et si on suppose que $u_n(x) < u_n(y)$ alors $u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n^2(x)}{n+1} < \dfrac{u_n^2(y)}{n+1} = u_{n+1}(y)$ et on a le résultat par récurrence.

c) La fonction $u_0 : x \mapsto x$ est bien sûr continue, puis par les théorèmes généraux de continuité si u_n est une fonction continue alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$ l'est aussi, on a donc le résultat demandé par récurrence.

2°) a) Si $(u_n(x))_n$ converge elle est bornée et alors $u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n^2(x)}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $(u_n(x))_n$ converge vers 0.

Supposons que pour un entier $n \geq p, u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$ alors

$u_{n+2}(x) = \dfrac{u_{n+1}^2(x)}{n+2} \leq \dfrac{u_n^2(x)}{n+2} \leq \dfrac{u_n^2(x)}{n+1} = u_{n+1}(x)$. Par récurrence on a prouvé la décroissance de $(u_n(x))_{n \geq p}$, comme la suite est minorée par 0 elle converge, et donc vers 0, on a alors $x \in E_0$.

b) On a $u_1(1) = u_0(1) = 1$ et $u_2(1) = \dfrac{1}{2} \leq u_1(1)$, donc par ce qui précède $1 \in E_0$.

Par contraposition de la proposition du a) si $x \notin E_0$ alors pour tout entier naturel p, $u_{p+1}(x) > u_p(x)$, la suite est alors strictement croissante et ne peut converger vers 0, elle diverge donc vers $+\infty$ et $x \in E_\infty$ et $E_0 \cup E_\infty = \mathbb{R}^+$.

c) Prouvons la propriété demandée par récurrence :

on a l'initialisation en p et si on suppose que $u_n(x) \geq n+2$ alors $u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n^2(x)}{n+1} \geq \dfrac{(n+2)^2}{n+1}$ puis

$\dfrac{(n+2)^2}{n+1} - (n+3) = \dfrac{n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 4n + 3)}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$ et $u_{n+1}(x) \geq n+3$.

On a donc que pour tout $n \geq p, u_n(x) \geq n+2$, ceci entraîne alors que $(u_n(x))_n$ diverge vers $+\infty$.

On a $u_0(2) \geq 2$ donc $2 \in E_\infty$ par cette propriété.

d) Soit $x \in E_0$, soit $t \in [0,x]$, alors on sait que pour tout entier $n, 0 \le u_n(t) \le u_n(x)$.

Comme $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par encadrement on a $u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $t \in E_0$.

On a prouvé que $[0,x] \subset E_0$.

De même soit $x \in E_\infty$, et soit $t \in [x,+\infty[$ alors pour tout entier $n, u_n(x) \le u_n(t)$

et $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où $[x,+\infty[\subset E_\infty$.

E_0 est non vide et d'après ce qui précède comme $2 \in E_\infty$, $[2,+\infty[\subset E_\infty$ et 2 est donc un majorant de E_0, E_0 a donc une borne supérieure notée α.

Soit $x \in [0,\alpha[$ alors par définition de la borne supérieure $\exists t \in E_0, x < t \le \alpha$ et $t \in E_0 \Rightarrow x \in E_0$ donc $[0,\alpha[\subset E_0$

Soit $x \in]\alpha,+\infty[$, alors $x \notin E_0$ par définition de α, donc $x \in E_\infty$ et on a bien $]\alpha,+\infty[\subset E_\infty$, et il ne peut exister deux réels vérifiant cette propriété car sinon un réel situé entre les deux ne serait ni dans E_0 ni dans E_∞.

e) Supposons $(\exists p \ge 1)(u_p(x) < 1)$ alors $u_{p+1}(x) = \dfrac{u_p^2(x)}{p+1} < \dfrac{u_p(x)}{p+1} < u_p(x)$ et d'après le a) $x \in E_0$.

Réciproquement si $x \in E_0$ alors $(u_n(x))_n$ converge vers 0 et on sait $(\exists p \ge 1)(u_p(x) < 1)$ (définition de la convergence).

Supposons $\alpha \in E_0$ alors $\exists p \ge 1, u_p(\alpha) < 1$, alors par continuité de u_p il existe un voisinage $[\alpha - h, \alpha + h]$ $(h > 0)$ tel que $\forall x \in [\alpha - h, \alpha + h], u_p(x) < 1$, et en particulier on a $x + h \in E_0$ ce qui contredit la définition de la borne supérieure. On a alors $\alpha \in E_\infty$, et $E_0 = [0,\alpha[$ et $E_\infty = [\alpha,+\infty[$.

3°) a) On sait que si $x \in E_\infty$ alors $(u_n(x))_n$ est strictement croissante, i.e. $u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n^2(x)}{n+1} > u_n(x)$,

d'où $\dfrac{u_n(x)}{n+1} > 1$, en particulier $u_n(\alpha) > n+1$.

Raisonnons par l'absurde : supposons l'existence d'un entier naturel n pour lequel $u_n(\alpha) > n+2$ alors la continuité de u_n donne l'existence d'un voisinage $[\alpha - h, \alpha + h]$ $(h > 0)$ tel que $\forall x \in [\alpha - h, \alpha + h], u_n(x) > n+2$, et en particulier on aurait $\alpha - h \in E_\infty$, ce qui est faux puisque $E_\infty = [\alpha,+\infty[$.

On a alors $\forall n \ge 1, n+1 \le u_n(\alpha) \le n+2$ et l'encadrement $1 + \dfrac{1}{n} \le \dfrac{u_n(\alpha)}{n} \le 1 + \dfrac{2}{n}$ donne $u_n(\alpha) \sim n$.

b) $\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n = n + 3 - u_{n+1}(\alpha) - 2n - 4 + 2u_n(\alpha) = -n - 1 - \dfrac{u_n^2(\alpha)}{n+1} + 2u_n(\alpha)$

$\varepsilon_{n+1}-2\varepsilon_n=-\frac{1}{n+1}\left(u_n(\alpha)-n-1\right)^2=-\frac{1}{n+1}\left(\varepsilon_n-1\right)^2$.

Et le a) nous donne $0\le\varepsilon_n\le 1$, donc $\left(\left(\varepsilon_n-1\right)^2\right)_n$ est bornée, on en déduit que $\varepsilon_{n+1}-2\varepsilon_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

c) La suite $(\varepsilon_n)_n$ étant bornée on peut en extraire une suite convergente $(\varepsilon_{\varphi(n)})_n$, vers $l\in[0,1]$.

Alors $\varepsilon_{\varphi(n)+1}=(\varepsilon_{\varphi(n)+1}-2\varepsilon_{\varphi(n)})+2\varepsilon_{\varphi(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2l$, et de la même façon $\varepsilon_{\varphi(n)+2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}4l$, puis plus généralement $\varepsilon_{\varphi(n)+k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2^k l$.

Supposons $l\neq 0$, alors il existe un rang *k* pour lequel $2^k l\ge 3$, et par définition de la convergence il existe un entier naturel *n* pour lequel $\left|\varepsilon_{\varphi(n)+k}-2^k l\right|\le 1$, avec ces choix on aurait $\varepsilon_{\varphi(n)+k}\ge 2^k l-1\ge 2$ ce qui est impossible puisque a suite $(\varepsilon_n)_n$ est à valeurs dans $[0,1]$.

On a donc montré que la seule limite possible d'une suite extraite convergente de la suite bornée $(\varepsilon_n)_n$ est 0, on sait alors que $(\varepsilon_n)_n$ converge vers 0.

On a donc $u_n(\alpha)=n+2+o(1)$.

4°) a) $u_{n+1}(x)-u_{n+1}(y)=\frac{u_n^2(x)-u_n^2(y)}{n+1}=\left(u_n(x)-u_n(y)\right)\frac{u_n(x)+u_n(y)}{n+1}$ et puisque *x* et *y* sont dans E_∞, on a $\frac{u_n(x)}{n+1}>1$ et $\frac{u_n(y)}{n+1}>1$, puis comme $y<x$ on a $u_n(x)-u_n(y)>0$, on obtient alors $u_{n+1}(x)-u_{n+1}(y)>2\left(u_n(x)-u_n(y)\right)$.

Une récurrence donne alors $u_n(x)-u_n(y)>2^{n-1}\left(u_1(x)-u_1(y)\right)=2^{n-1}(x^2-y^2)$

puis $u_n(y)<u_n(x)-2^{n-1}(x^2-y^2),\forall n\ge 1$.

b) Supposons que $u_n(x)\sim n$ alors $x\in E_\infty$ et donc $x\ge\alpha$.

Supposons que $x>\alpha$, considérons un réel $y\in]\alpha,x[$, alors $u_n(y)<2^n\left(\frac{u_n(x)}{2^n}-\frac{x^2-y^2}{2}\right)$,

or $\frac{u_n(x)}{2^n}\sim\frac{n}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $x^2-y^2>0$ d'où $2^n\left(\frac{u_n(x)}{2^n}-\frac{x^2-y^2}{2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$ et $u_n(y)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$

ce qui est une contradiction. On conclut que $x=\alpha$.

5°) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(\alpha)}=\frac{u_n^2(x)}{u_n^2(\alpha)}=v_n^2$, une récurrence montre alors que $v_n=v_0^{2^n}=\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{2^n}$.

On a alors $u_n(x)=u_n(\alpha)\times v_n\sim n\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{2^n}$.

6°) a) $\ln u_{n+1}(x) = 2\ln u_n(x) - \ln(n+1) \Rightarrow \dfrac{\ln u_{n+1}(x)}{2^{n+1}} - \dfrac{\ln u_n(x)}{2^n} = \dfrac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}$, en sommant on a un télescopage et on a $\dfrac{\ln u_n(x)}{2^n} - \ln x = -\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}$.

$\dfrac{\ln u_n(\alpha)}{2^n} \sim \dfrac{\ln n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $\ln\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{2^n}$ et la série converge.

b) Vu la convergence on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \right) \ln n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2^{n-1}} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n-1)}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2^{n-1}} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n-1)}{2^{n-1}} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(1-1/n)}{2^{n-1}} = -2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(1-1/n)}{2^n}.$$

$\dfrac{\ln n}{2^n} \geq 0$ et $-2\dfrac{\ln(1-1/n)}{2^n} \geq 0$ et $-2\dfrac{\ln(1-1/n)}{2^n} \sim \dfrac{2}{n2^n} = o\left(\dfrac{\ln n}{2^n}\right)$, on sait alors que

$-2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(1-1/k)}{2^k} = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}\right)$ et le reste de la première série étant négligeable devant celui de la seconde, la première série converge plus vite vers α que la seconde.

c) $$0 \leq -2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(1-1/k)}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \ln\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)$$

en utilisant l'inégalité classique $\ln(1+x) \leq x$, qui se prouve par exemple en utilisant la concavité de la fonction ln, on a $0 \leq -2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(1-1/k)}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{k-1}} \dfrac{1}{k-1} \leq \dfrac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{k-1}} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{2^n} \cdot 2 = \dfrac{1}{n2^{n-1}}$.

Pour avoir une valeur approchée de α à 10^{-3} près il suffit de calculer $-2\sum_{k=2}^{n} \dfrac{\ln(1-1/k)}{2^k}$ pour un entier n tel que $\left| -2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(1-1/k)}{2^k} \right| \leq 10^{-3}$, il suffit donc que $\dfrac{1}{n2^{n-1}} \leq 10^{-3}$, ou encore $n2^{n-1} \geq 10^3$, un petit calcul montre qu'on peut prendre $n = 8$ et $\alpha \approx 1{,}661$.