Familles sommables de nombres complexes

Il s'agit d'étendre la notion de convergence (absolue) à des familles indexées par un ensemble I « dénombrable » au sens défini ci-dessous.

A. Dénombrabilité

1. Définition

Un ensemble I est dit dénombrable lorsqu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur I. Il est dit au plus dénombrable lorsqu'il existe une bijection d'une partie D de $\mathbb{N}$ sur I.

Exemples

(i) $\mathbb{Z}$ est dénombrable puisque l'on peut définir une bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ par :
$\forall p \in \mathbb{N},\ \varphi(2p) = p,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(2p-1) = -p.$

(ii) Toute partie (non vide) d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

3. Théorème (critère de dénombrabilité)

Un ensemble I est au plus dénombrable si, et seulement si, il existe une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante (pour l'inclusion) de parties finies de I dont la réunion est I.

4. Corollaire

Le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exemples

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^k, \mathbb{Z}^k$ ainsi que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^k$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$, sont des ensembles dénombrables.
La dénombrabilité de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ a déjà été prouvée. Quant à celle de $\mathbb{Q}$, elle se déduit du théorème précédent en posant :
$J_0 = \{0\}$ et pour $n \geqslant 1, J_n = \left\{ \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ |p| + q \leqslant n \right\}$.

Remarque : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

B. Familles sommables de nombres réels positifs

Dans la suite, on notera $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

1. Définitions

Soit $u = (u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, indexée par un ensemble dénombrable I. On dit que u est une famille sommable si la partie de $\mathbb{R}$ définie par $\left\{ S_J(u) = \displaystyle\sum_{i\in J} u_i \;\middle|\; J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ est majorée. La borne supérieure de cette partie est alors appelée la somme de la famille. Elle est notée $S(u) = \displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ ou $S_I(u)$. Si u n'est pas sommable, on note $S(u) = +\infty$.

2. Théorème (caractérisation)

Une famille $u = (u_i)_{i\in I}$ de réels positifs, indexée par un ensemble dénombrable I est sommable si, et seulement si, il existe une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de parties finies de I dont la réunion est I, telle que la suite $(S_{J_n}(u))_n$ soit majorée. Dans ces conditions :

$$S(u) = \sup_n \big(S_{J_n}(u)\big) = \lim_n \big(S_{J_n}(u)\big).$$

3. Corollaire

Soient $u = (u_i)_{i \in I}$ et $v = (v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs tels que, pour tout $i \in I, u_i \leqslant v_i$.

(i) *Si la famille v est sommable, la famille u est sommable et $S(u) \leqslant S(v)$.*

(ii) *Si la famille u n'est pas sommable, la famille v n'est pas sommable.*

4. Théorème de sommation par paquets

Si $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de I, pour toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs, $S(u) = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i \in I_n} u_i \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{I_n}(u)$.

C. Familles sommables de nombres complexes

1. Définition

Une famille $u = (u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable I est sommable si la famille de réels positifs $|u| = (|u_i|)_{i \in I}$ l'est.

2. Théorème et définition

Soit $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable I. Pour toute suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est I, la suite $\left(S_{J_n}(u) = \sum_{i \in J_n} u_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est indépendante de $(J_n)_n$. On l'appelle alors la somme de la famille u et on la note : $S(u)$, ou $\sum_{i \in I} u_i$. On a $|S(u)| \leqslant S(|u|)$.

3. Théorème de sommation par paquets

Soient $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de I et $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres complexes de somme $S(u)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, S_{I_n}(u) = \sum_{i \in I_n} u_i$ est définie et, $S(u) = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty} S_{I_n}(u)$.

4. Corollaire

Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_j)_{j \in J}$ deux familles sommables de nombres complexes, de sommes respectives $S(u)$ et $S(v)$, alors la famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable de somme $S(u)S(v)$.

5. Théorème

$\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des familles sommables de nombres complexes indexées par un même ensemble au plus dénombrable I est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et l'application $S : u \mapsto S(u)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(I)$.

D. Familles sommables, séries : le lien

1. Théorème

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes réels positifs est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge. Dans ces conditions : $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

2. Théorème

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge ***absolument****. Dans ce cas :* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

4. Théorème

Si $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ sont deux suites complexes telles que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la famille $(a_p\, b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable de somme : $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p\, b_q = \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q\right)$.

Démonstration

Application de D.2. et C.4. □

Ce théorème a de nombreuses applications si l'on fait appel au théorème de groupement par paquets.

Par exemple, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes complexes absolument convergentes, en posant $d_n = \displaystyle\sum_{\delta\,\in\,\mathbb{N}^\star, d|n} u_\delta v_{n/\delta}$ la série $\sum d_n$ converge de somme $S(u)S(v)$. □

Une autre fait l'objet du théorème suivant. Il nous faut auparavant donner la

5. Définition

Le produit de Cauchy de deux séries $\sum a_n$ et $\sum\limits_n b_n$ à termes dans $\mathbb{K}$ est la série $\sum c_n$ où $c_n = (a\star b)(n) = \displaystyle\sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0} a_p b_{n-p}$.

6. Théorème

Le ***produit de Cauchy*** *de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ à termes complexes absolument convergentes converge absolument et a pour somme $S(a)S(b)$.*

Démonstration

Soit $J_n = \big\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \,|\, p+q\leqslant n\big\}$. La suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de $\mathbb{N}^2$ a pour réunion $\mathbb{N}^2$. Posons $u_{p,q} = a_p b_q$.

$S_{J_n}(u) = \displaystyle\sum_{p+q\leqslant n} u_{p,q} = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{p+q=k} a_p b_q\Big) = \sum_{k=0}^{n} c_k$. *cf.* notations de la définition 5.

D'après D.4. la suite double $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable de somme $S(a)S(b)$. Donc la suite $(S_{J_n}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S(a)S(b)$. Donc la série $\sum c_n$ converge absolument de somme $S(u) = S(a)S(b)$. □

7. Corollaire (fonction exponentielle complexe)

Pour $z\in\mathbb{C}$, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.
On note sa somme e^z ou $\exp(z)$.
Pour tout $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.
ie. la fonction exponentielle est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^\star,.)$

Démonstration

Si l'on pose $a_n = \dfrac{z^n}{n!}$ et $b_n = \dfrac{z'^n}{n!}$, on sait que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes puisque l'on connaît la fonction exponentielle de la variable réelle. Comme $c_n = (a \star b)(n) = \displaystyle\sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n} \frac{z^p}{p!}\frac{z'^q}{(n-q)!} = \frac{(z+z')^n}{n!}$ d'après le binôme de Newton, on a le résultat d'après D.6. □

Remarque

Le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ où $\sum a_n$ converge d'après le théorème des séries alternées mais n'est pas absolument convergente et, pour $n \geqslant 2$ on a : $|c_n| \geqslant 1$. D'où $\sum c_n$ diverge grossièrement.

8. Théorème d'interversion des sommations

La suite double de nombres complexes $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si,

(i) pour tout q dans $\mathbb{N}$, $\Big(\sum |u_{p,q}|\Big)_{p\geqslant 0}$ converge, on note v_q sa somme,

(ii) la série de terme général v_q converge.

Dans ces conditions : $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty}\Big(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\Big) = \sum_{p=0}^{\infty}\Big(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}\Big).$