36)

a) $dim\ \mathbb{R}_{n-1}[X]=n$ donc si on a $n+1$ polynômes dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, ces polynômes forment une famille liée, donc un des polynômes de la famille est combinaison linéaire des autres, ce qui entraîne qu'une ligne du déterminant de la matrice Y est combinaison linéaire des autres et donc que $\det Y = 0$.

b) On a clairement la relation matricielle $Y = AX$ qui donne $\det Y = \det A \times \det X$.

c) $V_{n+1}(1,...,n+1) = \prod_{0\le i<j\le n}(j+1-(i+1)) = \prod_{0\le i<j\le n}(j-i) = 1\times(1\times 2)\times(1\times 2\times 3)\times...\times(1\times...\times n) = \prod_{k=1}^{n} k!$

d) Il suffit d'appliquer la formule du **2°)** b) : $P_i(X) = (X+i+1)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(i+1)^{n-j}X^j$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2^n & \cdots & (n+1)^n \\ 2^n & 3^n & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n+1)^n & (n+2)^n & \cdots & (2n+1)^n \end{vmatrix} = \left|P_i(j)\right|_{(i,j)\in\{0,..n\}^2} = \det A \times V_{n+1}(0,...,n) \text{ avec :}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ 2^n\binom{n}{0} & 2^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & 2\binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ 3^n\binom{n}{0} & 3^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & 3\binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ (n+1)^n\binom{n}{0} & (n+1)^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & (n+1)\binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & \cdots & 2 & 1 \\ 3^n & 3^{n-1} & \cdots & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ (n+1)^n & (n+1)^{n-1} & \cdots & (n+1) & 1 \end{vmatrix}$$

en échangeant la 1ère colonne avec la dernière, la 2ème avec l'avant-dernière etc. on obtient le déterminant de Vandermonde $V_{n+1}(1,...,n+1)$ donc :

$$\det A = (-1)^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)}\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times V_{n+1}(1,...,n+1) = (-1)^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{\prod_{k=0}^{n} n!\prod_{k=1}^{n} k!}{\prod_{k=0}^{n} k!\prod_{k=0}^{n}(n-k)!} = (-1)^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{\prod_{k=0}^{n} n!}{\prod_{k=0}^{n} k!}$$

$$\text{et } \begin{vmatrix} 1 & 2^n & \cdots & (n+1)^n \\ 2^n & 3^n & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n+1)^n & (n+2)^n & \cdots & (2n+1)^n \end{vmatrix} = (-1)^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)}(n!)^{n+1}.$$