1) A étant symétrique réelle, on sait qu'elle est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale. Notons $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ ses valeurs propres qu'on peut supposer ordonnées dans l'ordre croissant. Il existe une base orthonormée de vecteurs propres $(X_1,...,X_n)$ telle que pour tout $i \in \{1,...,n\}, AX_i = \lambda_i X_i$.

Soit X un vecteur quelconque de norme 1, on le décompose sur la base $(X_1,...,X_n)$ sous la forme $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$, on a alors $AX = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i AX_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i X_i$.

Par calcul dans une base orthonormée on a $(AX|X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$, d'où $\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq (AX|X) \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$, et comme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = (X|X) = 1$ on a $\lambda_1 \leq (AX|X) \leq \lambda_n$ et ce pour tout vecteur colonne X de norme 1.

Avec les choix particuliers $X = X_1$ et $X = X_n$ on obtient $(AX|X) = \lambda_1$ et $(AX|X) = \lambda_n$.

Conclusion : $m(A)$ et $M(A)$ existent bien et sont égaux respectivement à la plus petite et à la plus grande valeur propre de A.

2) Si A et B sont dans $S_n(\mathbb{R})$ alors $S_n(\mathbb{R})$ étant un sous-espace vectoriel $\lambda A + (1-\lambda)B$ est aussi dans $S_n(\mathbb{R})$.

Soit X un vecteur quelconque de norme 1,

alors $((\lambda A + (1-\lambda)B)X|X) = \lambda(AX|X) + (1-\lambda)(BX|X) \leq \lambda M(A) + (1-\lambda)M(B)$, or $M(A) \in \mathrm{Spr}(A) \subset I$ et $M(B) \in \mathrm{Spr}(B) \subset I$, donc puisque I est un intervalle $\lambda M(A) + (1-\lambda)M(B) \in I$.

Ce nombre est un majorant de tous les éléments de la forme $((\lambda A + (1-\lambda)B)X|X)$, on en déduit que $M(\lambda A + (1-\lambda)B) \in I$.

De manière analogue on montre que $\lambda m(A) + (1-\lambda)m(B) \in I$, ce qui entraîne de même que $m(\lambda A + (1-\lambda)B) \in I$. Comme $M(\lambda A + (1-\lambda)B)$ est la plus grande valeur propre de $\lambda A + (1-\lambda)B$ et $m(\lambda A + (1-\lambda)B)$ la plus petite, on a bien $\mathrm{Spr}(\lambda A + (1-\lambda)B) \subset I$.

3) Soit X dans $M_{n,1}(\mathbb{R}), ((A+\lambda B)X|X) = (AX|X) + \lambda(BX|X) \geq 0$ et si $(A,B) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$ alors pour X dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et non nul, on a $(AX|X) > 0$ donc $((A+\lambda B)X|X) = (AX|X) + \lambda(BX|X) > 0$.

4) Déjà remarquons que si A est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors A est inversible : si X est un vecteur non nul de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ alors on a $(AX|X) > 0$ ce qui empêche d'avoir $AX = 0$, autrement dit seul le vecteur nul vérifie $AX = 0$, ce qui montre que A est une matrice « injective » donc inversible.

Ensuite, soit X non nul dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left(A^{-1}X\middle|X\right)=\left(A^{-1}X\middle|A(A^{-1}X)\right)>0$ puisque $A^{-1}X\neq 0$ si $X\neq 0$.

De plus toujours pour X non nul dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left(ABAX|X\right)=\left(BAX|AX\right)$ par symétrie de A. Par l'inversibilité de A on a toujours $AX\neq 0$ et donc $\left(ABAX|X\right)=\left(BAX|AX\right)>0$ puisque B est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

5) On a vu à la première question que si $A\in S_n(\mathbb{R})$ alors $m(A)$ est égal à la plus petite valeur propre de A, on en déduit que si $\mathrm{Spr}(A)\subset\mathbb{R}^+$ alors $m(A)\geq 0$.

Pour X dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et non nul on a $\left(AX|X\right)=\|X\|^2\left(A\dfrac{X}{\|X\|}\middle|\dfrac{X}{\|X\|}\right)\geq\|X\|^2 m(A)\geq 0$, ceci montre que A est dans $S_n^+(\mathbb{R})$.

Si $A\in S_n^+(\mathbb{R})$, soit X un vecteur de norme 1 qui soit un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de A, alors on a déjà vu au **1)** que $\left(AX|X\right)=\lambda_1$, on en déduit $\lambda_1\geq 0$ puis $\mathrm{Spr}(A)\subset\mathbb{R}^+$.

Sans refaire on a la propriété analogue portant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ en remplaçant les inégalités $m(A)\geq 0$ et $\lambda_1\geq 0$ par $m(A)>0$ et $\lambda_1>0$.

6) $\forall A\in S_n(\mathbb{R}), A\leq A$ équivaut à dire que la matrice nulle est positive ce qui est bien le cas.

Ensuite si A et B sont dans $S_n(\mathbb{R})$ alors on a bien $B-A\in S_n(\mathbb{R})$,

supposons $\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\left((B-A)X|X\right)\geq 0$ et $\left((A-B)X|X\right)\geq 0$, *i.e.*

$\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\left((B-A)X|X\right)\geq 0$ et $\left((B-A)X|X\right)\leq 0$, ceci entraîne $\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\left((B-A)X|X\right)=0$.

Le résultat de la question **1)** nous montre alors que toutes les valeurs propres de $B-A$ sont nulles, comme cette matrice est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle donc nulle, et $A=B$.

Et puisque $\left((C-A)X|X\right)=\left((C-B)X|X\right)+\left((B-A)X|X\right)$, on a bien la transitivité requise.

7) Soit $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, appelons λ la plus petite valeur propre de A, alors $\lambda>0$ par la question **5)** et pour X dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et non nul on a $\left(AX|X\right)=\|X\|^2\left(A\dfrac{X}{\|X\|}\middle|\dfrac{X}{\|X\|}\right)\geq\|X\|^2 m(A)=\lambda\|X\|^2=\lambda\left(X|X\right)$. On en déduit que pour tout X dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ $\left((A-\lambda I_n)X|X\right)\geq 0$ *i.e.* $\lambda I_n\leq A$.

Pour $A\leq I_n\Leftrightarrow M(A)\leq 1$, le calcul est le même :

$A\leq I_n\Leftrightarrow\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\left((I_n-A)X|X\right)\geq 0\Leftrightarrow\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\left(X|X\right)\geq\left(AX|X\right)$

et ceci est bien équivalent à $\left(A\frac{X}{\|X\|}\middle|\frac{X}{\|X\|}\right)\leq 1$ pour tout X dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et non nul, ou bien encore à $(AX|X)\leq 1$ pour tout X de norme 1, ce qui est encore équivalent à $M(A)\leq 1$.

8) Soit $S\in S_n(\mathbb{R})$, soit $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $((SBS-SAS)X|X)=(S(B-A)SX|X)=((B-A)SX|SX)\geq 0$ puisque $A\leq B$ et $SX\in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

9) Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$, si $A=P\times\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$, alors

$$f(A)=P\times\begin{pmatrix}a+b\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a+b\lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & a+b\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}=P\times\begin{pmatrix}a & 0 & \dots & 0\\ 0 & a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & a\end{pmatrix}P^{-1}+P\times\begin{pmatrix}b\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & b\lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & b\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$$

soit : $f(A)=aI_n+bA$.

Soit $B\in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A\leq B$, *i.e.* $B-A$ est positive, $bB-bA$ est alors aussi positive ainsi que $(aI_n+bB)-(aI_n+bA)$, ceci montre que $f(A)\leq f(B)$.

10) $B-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ est une matrice positive puisque son spectre est $\{0,1\}\subset\mathbb{R}^+$ (résultat de la question **5)**). On a alors $f(B)-f(A)=B^2-A^2=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, cette dernière matrice a pour déterminant -1, comme c'est le produit de ses deux valeurs propres on en déduit que le spectre de $f(B)-f(A)$ n'est pas dans $\mathbb{R}^+$ et donc que cette matrice n'est pas positive.

11) Soit $(A,B)\in(S_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A\leq B$,

en suivant l'indication de l'énoncé on a $A\leq B\Rightarrow B^{-1/2}AB^{-1/2}\leq I_n$, et donc avec la question **7)** $M(B^{-1/2}AB^{-1/2})\leq 1$.

Or $B^{-1/2}AB^{-1/2}\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après la question **4)**, donc $\mathrm{Spr}(B^{-1/2}AB^{-1/2})\subset]0,1]$, on en déduit que $\mathrm{Spr}((B^{-1/2}AB^{-1/2})^{-1})\subset[1,+\infty[$ *i.e.* $\mathrm{Spr}(B^{1/2}A^{-1}B^{1/2})\subset[1,+\infty[$, soit encore $I_n\leq B^{1/2}A^{-1}B^{1/2}$.

On réutilise alors encore une fois la question **8)** avec $S=B^{-1/2}$ pour obtenir $B^{-1}\leq A^{-1}$, et comme $A^{-1}-B^{-1}$ positive est équivalent à écrire $-B^{-1}-(-A^{-1})$ positive, on a prouvé que $-A^{-1}\leq -B^{-1}$ et finalement que $f:\begin{matrix}\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}\\ t\mapsto -1/t\end{matrix}$ définit un opérateur monotone sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

12) $\frac{A^2+B^2}{2}-\left(\frac{A+B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2}{2}-\frac{A^2+AB+BA+B^2}{4}=\frac{A^2-AB-BA+B^2}{4}=\left(\frac{A-B}{2}\right)^2$, or le carré d'une matrice symétrique est bien symétrique et c'est aussi une matrice positive puisque ses valeurs propres sont les carrés de celles de la matrice initiale et à ce titre sont toutes positives. On en déduit que $f:t\mapsto t^2$ définit un opérateur convexe.

Soit $g:t\mapsto a+bt+ct^2$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, alors $g\left(\frac{A+B}{2}\right)=aI_n+b\frac{A+B}{2}+cf\left(\frac{A+B}{2}\right)$, d'où $\frac{g(A)+g(B)}{2}-g\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{aI_n+bA+aI_n+bB}{2}-aI_n-b\frac{A+B}{2}+\frac{cf(A)+cf(B)}{2}-cf\left(\frac{A+B}{2}\right)$, ou encore $\frac{g(A)+g(B)}{2}-g\left(\frac{A+B}{2}\right)=c\left(\frac{f(A)+f(B)}{2}-f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)$, d'après le début de la question cette matrice est bien positive si $c\in\mathbb{R}^+$ et g définit un opérateur convexe.

13) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^2=\begin{pmatrix}10&4\\4&2\end{pmatrix}\Rightarrow B^3=\begin{pmatrix}34&14\\14&6\end{pmatrix}$, d'où $\frac{A^3+B^3}{2}=\begin{pmatrix}19&9\\9&5\end{pmatrix}$, et $\frac{A+B}{2}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\frac{A+B}{2}\right)^2=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\frac{A+B}{2}\right)^3=\begin{pmatrix}13&8\\8&5\end{pmatrix}$, d'où $\frac{A^3+B^3}{2}-\left(\frac{A+B}{2}\right)^3=\begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}$, comme à la question **10)** cette matrice a pour déterminant -1, comme c'est le produit de ses deux valeurs propres on en déduit que le spectre de $\frac{A^3+B^3}{2}-\left(\frac{A+B}{2}\right)^3=\begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}$ n'est pas dans $\mathbb{R}^+$ et donc que cette matrice n'est pas positive et $f:t\mapsto t^3$ ne définit donc pas un opérateur convexe.

14) On a déjà $f(B)=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$.

La matrice A est de rang 1, elle a donc 0 comme valeur propre, l'autre est sa trace qui vaut 2, ces valeurs propres étant positives on a $f(A)=A$. On a aussi $\frac{A+B}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est $\left(\frac{1}{2}-X\right)\left(-\frac{1}{2}-X\right)-\frac{1}{4}=X^2-\frac{1}{2}=\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(X+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

On peut donc trouver une matrice inversible P telle que $\frac{A+B}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}P\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$, et donc $f\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}P\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}I_2$.

Finalement $\frac{f(A)+f(B)}{2}-f\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}I_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & 1\\ 1 & 3-\sqrt{2}\end{pmatrix}$, mais le déterminant de cette matrice vaut $\frac{(1-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})-1}{4}=\frac{4-4\sqrt{2}}{4}=1-\sqrt{2}<0$, ce qui montre qu'elle a une valeur propre positive et une valeur propre négative, cette matrice n'est donc pas positive et $f:t\mapsto|t|$ ne définit pas un opérateur convexe.

15) Montrons que $\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}-\frac{(A^{-1}-B^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(A^{-1}-B^{-1})}{2}=\left(\frac{A+B}{2}\right)^{-1}$, ou ce qui est équivalent que $\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)-\frac{(A+B)(A^{-1}-B^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(A^{-1}-B^{-1})}{4}=I_n$.

Déjà on a $\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)=\frac{2I_n+AB^{-1}+BA^{-1}}{4}$, et

$\frac{(A+B)(A^{-1}-B^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(A^{-1}-B^{-1})}{4}=\frac{(BA^{-1}-AB^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(A^{-1}-B^{-1})}{4}$,

expression que l'on peut réécrire astucieusement :

$$\frac{(B(A^{-1}+B^{-1})-A(A^{-1}+B^{-1}))(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(A^{-1}-B^{-1})}{4}$$

et qui se simplifie en $\frac{(B-A)(A^{-1}-B^{-1})}{4}=\frac{BA^{-1}+AB^{-1}-2I_n}{4}$

et finalement comme $\frac{2I_n+AB^{-1}+BA^{-1}}{4}-\frac{AB^{-1}+BA^{-1}-2I_n}{4}=I_n$ on a bien établi la formule demandée.

D'après les questions **3)** et **4)** on a $\left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)^{-1}\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc avec la question **8)** on a $\frac{(A^{-1}-B^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(A^{-1}-B^{-1})}{2}$ qui est positive, ce qui montre que $f:\begin{matrix}\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}\\ t\mapsto 1/t\end{matrix}$ définit un opérateur convexe.

16) On a $(B^{1/2}-A^{1/2})X=\lambda X\Rightarrow\left(B^{1/2}X\middle|B^{1/2}X\right)-\lambda\left(B^{1/2}X\middle|X\right)=\left(B^{1/2}X\middle|A^{1/2}X\right)\le\left\|B^{1/2}X\right\|\cdot\left\|A^{1/2}X\right\|$,

or $\left\|A^{1/2}X\right\|=\sqrt{\left(A^{1/2}X\middle|A^{1/2}X\right)}=\sqrt{(AX|X)}$ et $\left\|B^{1/2}X\right\|=\sqrt{\left(B^{1/2}X\middle|B^{1/2}X\right)}=\sqrt{(BX|X)}$, et comme on a $A\le B$, on a $(AX|X)\le(BX|X)$, on en déduit $\left(B^{1/2}X\middle|B^{1/2}X\right)-\lambda\left(B^{1/2}X\middle|X\right)\le\sqrt{(BX|X)}\sqrt{(BX|X)}=(BX|X)$.

Ceci se réécrit alors $(BX|X)-\lambda\left(B^{1/2}X\middle|X\right)\le(BX|X)$, d'où $\lambda\left(B^{1/2}X\middle|X\right)\ge 0$.

Or $B\in S_n^{++}(\mathbb{R})\Rightarrow B^{1/2}\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et puisque par construction $B^{1/2}$ est symétrique avec des valeurs propres strictement positives, on en déduit que $\left(B^{1/2}X\middle|X\right)>0$ puis que $\lambda\ge 0$. On en conclut avec la question **5)** que $A^{1/2}\le B^{1/2}$.