On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels, la plupart des matrices intervenant dans ce problème sont dans $S_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathrm{Diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les réels $\lambda_1,...,\lambda_n$.

Pour $A \in S_n(\mathbb{R})$ on note $m(A) = \min_{\|X\|=1}(AX|X)$ et $M(A) = \max_{\|X\|=1}(AX|X)$, on note $\mathrm{Spr}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A (on identifie classiquement l'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes avec $\mathbb{R}^n$ et le produit scalaire utilisé ici est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, on a noté $\|X\| = \sqrt{(X|X)}$).

On dit qu'une matrice A de $S_n(\mathbb{R})$ est positive lorsque pour tout X de $M_{n,1}(\mathbb{R}), (AX|X) \geq 0$, on note $S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices positives.
On dit qu'une matrice A de $S_n(\mathbb{R})$ est définie positive lorsque pour tout X non nul de $M_{n,1}(\mathbb{R}), (AX|X) > 0$, on note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices définies positives.

On pourra utiliser sans démonstration le fait suivant : si $A = P\mathrm{Diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)P^{-1}$ et si k est un entier naturel alors $A^k = P\mathrm{Diag}(\lambda_1^k,...,\lambda_n^k)P^{-1}$, résultat encore vrai pour k entier relatif lorsque A est inversible.

PRELIMINAIRES

1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, justifier l'existence de $m(A)$ et de $M(A)$ et exprimer leurs valeurs en fonction des valeurs propres de A.

2) En déduire que si A et B sont dans $S_n(\mathbb{R})$, si λ est dans $[0,1]$ et si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Spr}(A) \subset I$ et $\mathrm{Spr}(B) \subset I$, alors $\mathrm{Spr}(\lambda A + (1-\lambda)B) \subset I$.

PREMIERE PARTIE, quelques propriétés des matrices positives.

3) Soit $(A,B) \in \left(S_n^+(\mathbb{R})\right)^2$ (respectivement $(A,B) \in \left(S_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2$), soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$, vérifier que $A + \lambda B \in S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $A + \lambda B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$).

4) Soit $(A,B) \in \left(S_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2$, montrer que $A^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que $ABA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

5) Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (respectivement $S_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Spr}(A) \subset \mathbb{R}^+$ (respectivement $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Spr}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$).

Les résultats de ces questions pourront être utilisés dans la suite du problème.

DEUXIEME PARTIE, une relation d'ordre sur $S_n(\mathbb{R})$

6) Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$, on écrira $A \leq B$ lorsque la matrice $B - A$ est dans $S_n^+(\mathbb{R})$, montrer que ceci définit une relation d'ordre dans $S_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'on a les trois propriétés suivantes :

$\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A \leq A$, $\forall (A,B) \in \left(S_n(\mathbb{R})\right)^2, A \leq B$ et $B \leq A \Rightarrow A = B$

et $\forall (A,B,C) \in \left(S_n(\mathbb{R})\right)^3, A \leq B$ et $B \leq C \Rightarrow A \leq C$.

7) Montrer que si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\lambda I_n \leq A$ et que pour $A \in S_n(\mathbb{R})$ $A \leq I_n \Leftrightarrow M(A) \leq 1$.

8) Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$ telles que $A \leq B$, montrer que $\forall S \in S_n(\mathbb{R}), SAS \leq SBS$.

TROISIEME PARTIE, fonctions matricielles sur $S_n(\mathbb{R})$

Si f est une fonction de la variable réelle définie sur un intervalle I et si $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ avec $\lambda_1,...,\lambda_n$ dans I, on définit la matrice $f(D)$ par $f(D) = \mathrm{Diag}(f(\lambda_1),...,f(\lambda_n))$.

Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et si $\mathrm{Spr}(A) \subset I$, on définit la matrice $f(A)$ de la façon suivante : si D est une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telle que $A = PDP^{-1}$ on pose $f(A) = Pf(D)P^{-1}$, ceci définit une matrice symétrique. On admet que si A a une autre décomposition $A = P'D'P'^{-1}$ (par exemple en permutant les éléments diagonaux de D) alors l'expression de $f(A)$ est inchangée.

Par un abus de notation clair on utilisera la même notation f pour la fonction de la variable réelle et pour la fonction matricielle.

Ainsi en utilisant la fonction $\begin{matrix}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto t^{1/2}\end{matrix}$, on peut définir une matrice notée $A^{1/2}$ sur $S_n^+(\mathbb{R})$ par $A^{1/2} = P \times \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_n}) \times P^{-1}$ si $A = P \times \mathrm{Diag}(\lambda_1,...,\lambda_n) \times P^{-1}$. De cette façon on peut aussi définir une matrice $A^{-1/2}$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et on a facilement $\left(A^{-1/2}\right)^{-1} = A^{1/2}$.

Grâce à la remarque faite en fin d'introduction on voit aisément que pour la fonction $f : t \mapsto t^k$, on a $f(A) = A^k$ si k est un entier.

On dit que f est un opérateur croissant si pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A,B) \in \left(S_n(\mathbb{R})\right)^2, A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B) \quad \text{(en supposant que } \mathrm{Spr}(A) \subset I \text{ et } \mathrm{Spr}(B) \subset I\text{)}.$$

On dit que f est un opérateur convexe si pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall (A,B) \in \left(S_n(\mathbb{R})\right)^2, f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \frac{f(A)+f(B)}{2}$$

(en supposant $\mathrm{Spr}(A) \subset I$ et $\mathrm{Spr}(B) \subset I$, alors par **2)** on a bien $\mathrm{Spr}\left(\frac{A+B}{2}\right) \subset I$).

9) Montrer que la fonction $f : t \mapsto a + bt$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ définit un opérateur croissant.

10) En utilisant les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $f : \begin{matrix}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto t^2\end{matrix}$ ne définit pas un opérateur croissant sur $S_n^+(\mathbb{R})$.

11) Montrer que $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*} \\ t \mapsto -1/t \end{matrix}$ définit un opérateur croissant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (indication : en partant de A et B dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A \le B$, on pourra commencer par utiliser le résultat de la question **8)** avec $S = B^{-1/2}$).

12) Montrer que pour $(A,B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$, $\dfrac{A^2+B^2}{2} - \left(\dfrac{A+B}{2}\right)^2$ est le carré d'une matrice. En déduire que $f : t \mapsto t^2$ définit un opérateur convexe puis que $g : t \mapsto a + bt + ct^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ définit un opérateur convexe.

13) En utilisant les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $f : t \mapsto t^3$ ne définit pas un opérateur convexe.

14) En utilisant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, montrer que $f : t \mapsto |t|$ ne définit pas un opérateur convexe.

15) Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $\dfrac{A^{-1}+B^{-1}}{2} - \left(\dfrac{A+B}{2}\right)^{-1} = \dfrac{(A^{-1}-B^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(A^{-1}-B^{-1})}{2}$. En déduire que $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*} \\ t \mapsto 1/t \end{matrix}$ définit un opérateur convexe.

16) On montre ici que $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*} \\ t \mapsto t^{1/2} \end{matrix}$ est un opérateur croissant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$:

soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $A \le B$, pour montrer que $A^{1/2} \le B^{1/2}$ on utilise la question **5)** : soit λ une valeur propre de $B^{1/2} - A^{1/2}$ et X un vecteur propre associé, montrer que $\left(B^{1/2}X \middle| B^{1/2}X\right) - \lambda\left(B^{1/2}X \middle| X\right) \le \left(BX|X\right)$ et en déduire que λ est positif.