ESPACES VECTORIELS NORMÉS : PREMIÈRES DÉFINITIONS

Définition d'une norme

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, une norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

(i) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ***Séparation***

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ ***Homogénéité***

(iii) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ ***Inégalité triangulaire***

Le couple (E, N) est alors appelé espace vectoriel normé.

Exemple : La valeur absolue (le module) est une norme sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{C}$).

Remarque : tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; une $\mathbb{C}$-norme est donc une $\mathbb{R}$-norme ; la réciproque est fausse.

Proposition: si N est une norme sur E alors

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ \big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x - y)$.

(ii) $\forall q \in \mathbb{N}^\star,\ \forall (x_1, \ldots, x_q) \in E^q,\ N\Big(\sum_{k=1}^{q} x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{q} N(x_k)$.

Théorème : si $(x, y) \mapsto \big(x|y\big)$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E, alors l'application $x \mapsto \|x\|_2 = \big(x|x\big)^{1/2}$ est une norme sur E, dite associée au produit scalaire.

Distance associée à une norme

a) Définition : on appelle alors distance associée à N l'application d de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = N(x - y)$.

b) Propriétés de $\boldsymbol{d}$

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(y, x)$ ***Symétrie***

(iii) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ ***Inégalité triangulaire***

Boules

a) Soient (E, N) un espace vectoriel normé, a un élément de E et $r \in \mathbb{R}_+^\star$, on définit :

$B(a, r) = \big\{x \in E \ \big|\ N(x - a) < r\big\}$ boule ouverte de centre a et de rayon r,

$B_f(a, r) = \big\{x \in E \ \big|\ N(x - a) \leqslant r\big\}$ boule fermée de centre a et de rayon r,

$S(a, r) = \big\{x \in E \ \big|\ N(x - a) = r\big\}$ sphère de centre a et de rayon r.

b) Définition Si (E, N) est un espace vectoriel normé, une partie A de E est dite bornée si elle est contenue dans une boule.

c) Avec les mêmes notations A est bornée si, et seulement si, il existe un réel positif Δ tel que, pour tout $(x, y) \in A^2,\ N(x - y) \leqslant \Delta$ ou encore si, et seulement si, il existe un réel positif M tel que, pour tout $x \in A,\ N(x) \leqslant M$.

d) Si A est bornée et non vide, on appelle diamètre de A, et on note $\mathrm{diam}(A)$, la borne supérieure de $\big\{N(x - y) \ \big|\ (x, y) \in A^2\big\}$.

e) Si X est un ensemble, une application f entre X et l'espace vectoriel normé E est dite bornée si la partie $f(X)$ de E est bornée. On note $\mathcal{B}\big(X,E\big)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E.

Distance d'un point à une partie

Soient (E,N) un espace vectoriel normé et d la distance associée. Si A est une partie non vide de E et x un élément de E, l'ensemble $\big\{N(x-a) \;\big|\; a\in A\big\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, on appelle distance de x à A, et l'on note $d(x,A)$, le nombre réel $\inf\limits_{a\in A} N(x-a) = \inf\limits_{a\in A} d(x,a)$.

Vecteurs unitaires : si (E,N) est un espace vectoriel normé, on appelle vecteur unitaire tout élément v de E tel que $N(v)=1$.

Remarque : si (E,N) est un espace vectoriel normé et si $u\in E\setminus\{0\}$, alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, le vecteur $v=\lambda\,\dfrac{u}{N(u)}$ est unitaire si, et seulement si, $|\lambda|=1$.

Norme et distance induites

Soient (E,N) un espace vectoriel normé et d la distance associée.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, la restriction de N à F est une norme sur F, appelée norme induite par N sur F, on la note encore N.

Si A est une partie de E, la restriction de d à $A\times A$ est appelée distance induite sur A et vérifie les mêmes propriétés que d.

Produit d'espaces vectoriels normés

Théorème et définition : n désigne un élément de $\mathbb{N}^\star$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, (E_i,N_i) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $E=E_1\times\cdots\times E_n$ est l'espace vectoriel produit. L'application $N:(x_1,\dots,x_n)\mapsto \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} N_i(x_i)$ est une norme sur E, appelée norme produit et (E,N) est appelé espace vectoriel normé produit.

Exemples

a) sur $\mathbb{K}^n$: N_1, N_2, N_∞.

$N_\infty : (x_1,\dots,x_n)\mapsto \max\big\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\big\}$.

$N_1 : (x_1,\dots,x_n)\mapsto |x_1|+\cdots+|x_n|$.

$N_2 : (x_1,\dots,x_n)\mapsto \big(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2\big)^{1/2}$.

b) En dimension infinie.

• Si X est un ensemble non vide et (E,N) un espace vectoriel normé, $\mathcal{B}(X,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $N_\infty^X : f\mapsto \sup\limits_{x\,\in\,X} N\big(f(x)\big)$ est une norme sur cet espace vectoriel, on l'appelle ***norme de la convergence uniforme.***

• N_1, N_2 et $N_\infty^{[a,b]}$ sur $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

• N_∞ sur $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

• N_1 sur $\ell^{\mathbf{1}}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

• N_2 sur $\ell^{\mathbf{2}}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.