Calcul différentiel et intégral (*rappels de MPSI et compléments*)

Théorème de Rolle

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}, a \neq b$. Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Théorème de Rolle (généralisation 1) : soit $a \in \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ est dérivable sur $]a,+\infty[$ et $\lim\limits_{+\infty} f = f(a)$, alors il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

Démonstration : soit $\varphi : [0,1[\to \mathbb{R}, t \mapsto a + \dfrac{t}{1-t}$.
Posons $F(t) = f \circ \varphi(t)$ si $t \in [0,1[$ et $F(1) = f(a)$. F vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur $[0,1]$. Il existe donc $c \in]0,1[$ tel que $F'(c)=0$. Comme $F'(t) = f'(\varphi(t)).\varphi'(t)$ et $\varphi'(t) \neq 0$, le théorème est prouvé.

Théorème de Rolle (généralisation 2) : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R}), a<b$ possède $n+1$ zéros sur $[a,b]$, alors $f^{(n)}$ a au moins un zéro sur $[a,b]$.

Exercice : si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Solution
$P(X) = \lambda \prod\limits_{k=1}^{n} (X-a_k)^{\alpha_k},\ a_1 < a_2 < \cdots < a_n,\ \lambda \in \mathbb{R}^*, N = \deg(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$.
D'après le théorème de Rolle, P' a $(n-1)$ zéros réels $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ où
$a_k < b_k < a_{k+1}$. Chaque a_k est racine de P' d'ordre $(\alpha_k - 1)$. Donc P' a au moins :
$n-1+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k-1) = N-1$ zéros réels. Comme $\deg(P') = N-1$, P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème des accroissements finis

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}, a \neq b$. Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$.

Théorème des accroissements finis (généralisation)

Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})\right)^2$, si f et g sont dérivables sur $]a,b[$ et si $g'(x) \neq 0$ si $x \in]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Démonstration : Soit $\psi : x \mapsto f(x) - f(a) - A(g(x)-g(a))$ où $A = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Procédés généraux de recherche de primitives.

1. Utilisation de la linéarité de l'intégration.
2. Changement de variable.
   exemples : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}, \int \frac{\ln^3(x)-1}{\ln^2(x)+1}\frac{dx}{x}, \int \frac{dx}{x(x^n+1)}, n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Intégration par parties. Elle est intéressante dans les 2 cas suivants :
   a) Pour déterminer une formule de récurrence. *exemple :* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$
   b) cas de fonctions transcendantes ayant une dérivée algébrique :
   $\ln, \arctan, \arcsin, \arccos$.

Primitives de fonctions rationnelles

1. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
2. Primitives de la partie entière : R.A.S.

3. Primitives des éléments simples :

Si $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + C & \text{si } n = 1 \\ \dfrac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \geqslant 2 \end{cases}$; $x \neq a$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + i \arctan\left(\dfrac{x - \Re e(a)}{\Im m(a)}\right) + C \text{ si } n = 1 \\ \dfrac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \qquad \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$

Remarque : certaines fonctions n'ont pas de primitives s'exprimant à l'aide des fonctions usuelles connues $f : x \mapsto f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, ou $\dfrac{\sin(x)}{x}$, ou e^{-x^2}, ou $\sin(x^2)$, ou $\cos(x^2)$, ou $\dfrac{1}{\ln(x)}$, ou $\ln(\ln(x))$, ou $e^{-x}\ln(x), \ldots$

Primitives usuelles

$f(x)$	$\displaystyle\int f(x)dx$	$x \in I$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x \in]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$ ou $\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$x \in]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$.
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[, n \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\operatorname{cotan}(x)$	$x \in]n\pi, (n+1)\pi[, n \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert + C$	$x \in]n\pi, (n+1)\pi[, n \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$	$x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$	$\operatorname{th}(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}$	$-\coth(x)$	$x \in]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$x \in]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a \in \mathbb{R}^\star$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{\lvert a\rvert}\right)$	$x \in \left]-\lvert a\rvert, +\lvert a\rvert\right[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a + x^2}}, a \in \mathbb{R}^\star$	$\ln\lvert x + \sqrt{a + x^2}\rvert$	$\begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{si } a > 0 \\ x \notin \left[-\sqrt{-a}, \sqrt{-a}\right] & \text{si } a < 0 \end{cases}$