Théorème de sommation des relations de comparaison

(i) Soient f et g continues par morceaux sur $[a,b[$,
f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et g à valeurs complexes avec $g \underset{b}{=} O(f)$.

a) Si $f \in \mathcal{L}^1\big([a,b[,\mathbb{R}_+\big)$ alors $\displaystyle\int_x^b g \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b f\right)$.

b) Dans le cas contraire, $\displaystyle\int_a^x g \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x f\right)$.

(ii) On a les mêmes propriétés en remplaçant « O » par « o » ou « $\sim$ ».

Théorème de comparaison à une série numérique

Si $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, positive et décroissante, alors $\sum w_n$ où $w_n = \left(\displaystyle\int_{n-1}^n f\right) - f(n)$ converge.

La suite $\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t)dt\Big)$ converge.

$f \in \mathcal{L}^1\big(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+\big) \iff \sum f(n)$ converge, sinon $\displaystyle\sum_{k=0}^n f(k) \underset{n\to\infty}{\sim} \int_0^n f$.

Continuité des Intégrales à paramètre

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ et $f \in \mathcal{F}\big(A\times I,\mathbb{K}\big)$ telle que :

• pour tout $t \in I$, $f(.,t)$ est continue sur A ;

• pour tout $x \in A$, $f(x,.)$ est continue par morceaux sur I ;

• il existe φ dans $\mathcal{L}^1\big(I,\mathbb{R}\big)$ telle que, pour tout $(x,t) \in A\times I, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur A.

• En pratique on vérifie l'hypothèse de domination sur tout compact de A.

Dérivabilité des intégrales à paramètre

Soient I et A sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}\big(I\times A,\mathbb{K}\big)$ telle que :

• pour tout $t \in I$, $f(.,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;

• pour tout $x \in A$, $f(x,.)$ est intégrable sur I ;

• pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ est continue par morceaux sur I ;

• il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ positive telle que $\forall x \in A, \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right| \leqslant \varphi$.

alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_A f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $g'(x) = \displaystyle\int_A \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

• En pratique on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A.

• Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ alors g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec,

si $i \in \mathbb{N}^\star, i \leqslant k$, $g^{(i)}(x) = \displaystyle\int_A \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$.

Limite des intégrales à paramètre

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, a adhérent à A et $f \in \mathcal{F}\big(A\times I,\mathbb{K}\big)$ telle que :

• pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \ell(t)$ où $\ell \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}(I,\mathbb{K})$;

• pour tout $x \in A$, $f(x,.)$ est continue par morceaux sur I ;

• il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1\big(I,\mathbb{R}_+\big)$ telle que, pour tout $(x,t) \in A\times I, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

alors $\displaystyle\int_I f(x,t)\,dt \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \ell(t)dt$.