Les parties **II**, **III**, **IV** et **V** sont indépendantes sauf en ce qui concerne les notations, elles pourront utiliser des résultats de la partie **I**.

PARTIE I

1°) Soit φ la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}$ si $t\neq 0$ et $\varphi(0)=0$.

a) Donner le développement limité à l'ordre 4 de φ au voisinage de 0, en déduire que φ est continue et dérivable en 0, préciser $\varphi'(0)$.

b) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

c) On définit la fonction ψ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par $\psi(t)=\frac{t}{\sin t}$ si $t\neq 0$ et $\psi(0)=1$, montrer sans calcul que ψ est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, préciser $\psi'(0)$.

2°) Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$, montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)dt=0$.

3°) Pour $n\geq 1$ et $t\in[0,\pi]$, on pose $A_n(t)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)$. Calculer $A_n(0)$ et $A_n(\pi)$ et montrer que $A_n(t)=\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ pour $t\in]0,\pi[$. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt$.

PARTIE II

1°) Déterminer la limite de $\int_0^{\pi/2}\varphi(t)\sin(2n+1)t\,dt$ quand n tend vers $+\infty$, et en déduire la limite de $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)t}{t}dt$ quand n tend vers $+\infty$.

2°) On pose $F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$.

a) Justifier cette définition, que peut-on dire de $F\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$?

b) Soit $x\geq\frac{\pi}{2}$, montrer qu'il existe un entier $n(x)$ tel que $(2n(x)+1)\frac{\pi}{2}\leq x<(2n(x)+3)\frac{\pi}{2}$.

c) Montrer que $\int_{(2n(x)+1)\pi/2}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. En déduire $l=\lim_{x\to+\infty}F(x)$.

3°) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $\left|\int_x^y\frac{\sin t}{t}dt\right|\leq\frac{2}{x}$ pour $y>x>0$, en déduire que $\forall x>0,|F(x)-l|\leq\frac{2}{x}$.

PARTIE III

1°) Trouver deux constantes réelles α et β telles que $\forall n \geq 1, \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$.

2°) Que vaut alors $2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t) A_n\left(\frac{t}{2}\right)dt$?

3°) Montrer sans calcul que la fonction $t \mapsto \frac{(\alpha t^2 + \beta t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ pour $t \neq 0$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, en déduire celle de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

PARTIE IV

Soit f une fonction continue et 2π périodique, on appelle coefficient de Fourier d'ordre n de f le nombre complexe $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-\text{int}}dt$. On pose pour tout x réel $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx}$.

Lorsque la suite $(S_n(x))_n$ converge on note $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ sa limite, qu'on appelle la série de Fourier de f en x.

On suppose dans cette partie uniquement que f a en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

1°) Soit x un réel, montrer que $S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1)\left(\frac{x-t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}dt$.

2°) En déduire que $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x+2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x-2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt$.

3°) a) En utilisant la valeur déjà calculée au **I** de $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt$ expliciter une fonction u continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que $S_n(x) - f(x) = \int_0^{\pi/2} u(t)\sin(2n+1)tdt$. Montrer que u peut se prolonger en une fonction continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) On admet que le résultat de **I 2°)** est encore vrai pour une fonction g seulement continue, montrer que $(S_n(x))_n$ converge et que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = f(x)$ (ce résultat est le théorème de Dirichlet-Lejeune : $f(x)$ est égale à la somme de sa série de Fourier).

4°) Soit f la fonction 2π périodique telle que $\forall x \in [-\pi,+\pi], f(x) = x^2$, tracer la courbe de f puis calculer les coefficients de sa série de Fourier. Appliquer le théorème vu au **3°)** à f. En choisissant des valeurs particulières pour x retrouver alors la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ puis donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

PARTIE V

Ici f est seulement supposée continue et 2π périodique, on pose pour tout x, $F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} S_m(x)$.

1°) Montrer que $\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{+m} e^{ikt} = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ et calculer $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{2\pi(n+1)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt$.

2°) Montrer que $F_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{2\pi(n+1)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt$.

3°) a) Soit $\alpha \in]0,\pi[$, montrer qu'il existe une constante K telle que l'on puisse majorer $\left| \int_{\alpha}^{+\pi} (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{2\pi(n+1)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \right|$ et $\left| \int_{-\pi}^{-\alpha} (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{2\pi(n+1)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \right|$ par $\frac{K}{(n+1)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

b) En déduire en utilisant la continuité de f en x que $(F_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ (théorème de Fejer). En utilisant une uniforme continuité à justifier prouver que la convergence est uniforme.