Intégration et dérivation

I. Intégrale dépendant d'un paramètre :

$$g : A \to \mathbb{K}, x \mapsto \int_I f(x,t)dt,\ I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}.$$

Théorème (continuité)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, A une partie de $\mathbb{R}^m$ et $f \in \mathcal{F}\big(A \times I, \mathbb{K}\big)$.
Si • pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A,
• pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
• il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1\big(I, \mathbb{R}_+\big)$ telle que, pour tout $(x,t) \in A \times I, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,
alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur A.

En pratique on vérifie l'hypothèse de domination sur tout compact inclus dans A ou sur des intervalles adaptés à la situation.
Théorème (limite). On utilise le théorème de convergence dominée appliqué aux familles de fonctions $(f(x,.))_{x \in A}$.
Théorème de Leibniz (dérivabilité)
Soient I et A sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}\big(A \times I, \mathbb{K}\big)$.
Si • pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,
• pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A,
• pour tout $x \in A, t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
• pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Corollaire
Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Si pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,.)$ est intégrable sur I et si l'hypothèse de domination sur un segment est vérifiée par $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$, alors g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et $\forall i \in [\![0,k]\!], \forall x \in A, g^{(i)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$.

II. Dérivation des suites et séries de fonctions

Théorème. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ convergeant simplement sur I vers f. Si $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Corollaire. Soient $k \in \mathbb{N}^\star$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ telle que
(i) Pour tout $p \in \mathbb{N},\ p < k$, $(f_n^{(p)})$ converge simplement sur I
(ii) $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, sa limite f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et vérifie $f^{(k)} = g$.

Théorème. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que $\sum f_n$ converge simplement sur I et que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I. Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, sa somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.

Corollaire. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$.
Si pour tout $p \in \mathbb{N}, p < k, \sum f_n^{(p)}$ converge simplement sur I et si $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors :
$\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, sa somme S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $p \leqslant k,\ S^{(p)} = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}$.

III. Comparaison séries/intégrales

Théorème
Si f est continue par morceaux positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors
• la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt\right)_{n \geqslant 0}$ converge,
• la série $\sum w_n$ où $w_n = \left(\displaystyle\int_{n-1}^{n} f\right) - f(n)$ est à termes positifs et convergente.
• $f \in \mathcal{L}^1\big(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big) \iff \sum f(n)$ converge, sinon $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n \to \infty}{\sim} \int_0^n f$.

IV. Sommation des relations de comparaison

Théorème (intégration des relations de comparaison)
Soient f et g continues par morceaux sur $[a,b[$, f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et g à valeurs complexes avec $g \underset{b}{=} O(f)$.
• Si $f \in \mathcal{L}^1\big([a,b[, \mathbb{R}\big)$ alors $\displaystyle\int_x^b g \underset{x \to b}{=} O\left(\int_x^b f\right)$.
• Dans le cas contraire, $\displaystyle\int_a^x g \underset{x \to b}{=} O\left(\int_a^x f\right)$.
Résultats analogues en remplaçant « O » par « o » ou « $\sim$ ».

Théorème de sommation des relations de comparaison

$\sum v_n$ désigne une série à termes positifs, $\sum u_n$ une série à termes complexes vérifiant $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$.

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{=} O\Big(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\Big)$.
- Si $\sum v_n$ diverge alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{=} O\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big)$.

Résultats analogues en remplaçant « O » par « o » ou « $\sim$ ».

Intégrales, suites et séries mixed grill

I. Sur un segment

Théorème 1 : si (f_n) est une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f.$$

Théorème 2 : soit $(f_n) \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)^{\mathbb{N}}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\sum \int_a^b f_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

II. Sur un intervalle quelconque (en particulier un segment)

Théorème de convergence dominée

Si (f_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{C})$, convergeant simplement sur I vers $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{C})$. S'il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1\big(I,\mathbb{R}\big)$ positive telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$, alors $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ et $\displaystyle\int_I f = \lim_n \int_I f_n$.

Théorème d'intégration terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ convergeant simplement sur I, de somme $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ telle que $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors

$$f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}),\ \sum \int_I f_n \text{ converge et } \int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

Théorème de convergence monotone

Soit (f_n) une suite de fonctions continue par morceaux et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors dans $[0,+\infty]$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\Big)dt.$$

Remarque : les théorèmes donnent des conditions suffisantes pour l'interversion des deux signes « somme ».

Intégration par parties sur un intervalle quelconque

$$\int_a^b fg' = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f'g$$

L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature.

Familles sommables

Théorème de sommation par paquets.

Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $u = (u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes de somme $S(u)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_{I_n}(u) = \displaystyle\sum_{i\in I_n} u_i$ est définie et, $S(u) = \displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty} S_{I_n}(u)$.

Corollaire

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles sommables de nombres complexes, de sommes respectives $S(u)$ et $S(v)$, alors la famille $(u_iv_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable de somme $S(u)S(v)$.

Corollaire

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties d'un ensemble I non vide. Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de nombres complexes de somme $S(a)$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I_n} a_i \xrightarrow[n\to\infty]{} S(a)$.

Corollaire

Le produit de Cauchy de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ à termes complexes absolument convergentes converge absolument et a pour somme $S(a)S(b)$.

Théorème d'interversion des sommations

Soit, pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $u_{p,q}\in\mathbb{C}$.

Si pour tout $q\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} |u_{p,q}|$ converge et $\displaystyle\sum_{q\geqslant 0}\sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}|$ converge,

alors pour tout $q\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} u_{p,q}$ converge et $\displaystyle\sum_{q\geqslant 0}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$ converge, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{q\geqslant 0} u_{p,q}$ converge et $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}$ converge avec

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}.$$