# Mécanique

## (Mécanique des solides indéformables)

### Pour réviser le cours

**EXERCICE 1** **Le pendule lesté (⋆)**

1. La tige a un mouvement de rotation autour de l'axe $z$. Comme il s'agit d'un solide, l'équation du mouvement s'obtient par le théorème du moment cinétique scalaire autour de l'axe $Oz$.
   - Système : tige, modélisée par un solide formé de deux points matériels de masse m liés rigidement.
   - Référentiel $\mathcal{R}$ : terrestre, qui est galiléen en bonne approximation pour un tel mouvement.

   Bilan des actions mécaniques :
   - Le contact entre la tige et le bâti est modélisé par une liaison pivot, qu'on suppose implicitement parfaite donc de moment :
   $$\mathscr{M}_z\,(\text{liaison}) = 0$$
   - Le poids $\overrightarrow{P}_1$ du point matériel $M_1$, située à distance $\frac{\ell}{2}$ de l'axe, a pour moment par rapport à l'axe (on utilise le repère polaire habituel) :
   $$\mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P}_1\right) = \left(\overrightarrow{OM}_1 \wedge (m\overrightarrow{g})\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = -\frac{1}{2}mg\ell\sin(\theta)$$
   - Le poids $\overrightarrow{P}_2$ de la deuxième masse a pour les mêmes raisons un moment
   $$\mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P}_2\right) = \left(\overrightarrow{OM}_2 \wedge (m\overrightarrow{g})\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = -mg\ell\sin(\theta)$$

   Comme le moment cinétique est additif, le moment cinétique du système est la somme des moments cinétiques de chacune des deux masses (le moment cinétique de la tige est nul car son moment d'inertie est négligeable). Le moment cinétique du point matériel $M_1$ vaut $\mathcal{L}_{(z)}(M_1) = m\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}$.

   ☞ Ce résultat se retrouve directement à partir du moment d'inertie d'un point matériel situé à distance $R$ de l'axe de rotation $z$, $J_z = mR^2$ ... mais aucune expression de moment d'inertie n'est a priori à connaître.

   De même, on trouve pour $M_2$ : $\mathcal{L}_{(z)}(M_2) = m\ell^2\dot{\theta}$. On a donc au total $\mathcal{L}_{(z)}() = \frac{5}{4}m\ell^2\dot{\theta}$.
   Finalement, d'après la loi du moment cinétique (on note $S = \{M_1 + M_2\}$),
   $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{(z)}(S)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P_1}\right) + \mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P_2}\right) \Rightarrow \frac{5}{4}m\ell^2\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}mg\ell\sin(\theta)$$
   D'où :
   $$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{6g}{5\ell}\sin(\theta) = 0}$$

2. Par application de la définition,
   $$2m\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OM_1} + m\overrightarrow{OM_2} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3\ell}{4}\overrightarrow{u_r}}$$

3. Appliquons le théorème du moment cinétique à ce nouveau système, un point matériel $G$ de masse $2m$ situé à distance $\frac{3\ell}{4}$ de l'axe. La seule action mécanique qu'il subit est son poids, de moment
   $$\mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P}\right) = -2m \times g \times \frac{3\ell}{4}\sin(\theta)$$
   et son moment cinétique par rapport à l'axe z vaut
   $$\mathcal{L}_{(z)}(G) = 2m \times \frac{2\ell^2}{16}\dot{\theta}$$

D'après le théorème du moment cinétique,

$$\frac{9m\ell^2}{8}\ddot{\theta} = -\frac{3mg\ell}{2}\sin(\theta) \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{4g}{3\ell}\sin(\theta) = 0}$$

On n'aboutit pas à la même équation du mouvement, ce qui signifie que **les deux systèmes ne sont pas équivalents**.

☞ La conclusion à retenir que la dynamique d'un solide en rotation n'est pas donnée par celle d'un matériel situé en son centre d'inertie, ce qui est une différence importante avec un solide translation, pour lequel on aurait obtenu la même équation avec les deux modèles.

## EXERCICE 2 Cylindre dans une goutière (⋆⋆)

1. Le système est le cylindre soumis à son poids (force conservative) et à la réaction du support (ne travaillant pas en l'absence de glissement).

   Le travail du poids est $\overrightarrow{P} = mg\,\overrightarrow{u_x} \cdot (b\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) = -mgb\sin(\theta) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p$. On peut donc écrire :

   $$\mathcal{E}_p(\theta) = -mgb\cos(\theta) + \text{cte} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_p(0) = -mgb + \text{cte} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{cte} = mgb}$$

   On obtient :

   $$\boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = mgb\,(1 - \cos(\theta)) = \frac{1}{2}mgb\theta^2 + \circ(\theta^2)}$$

2. La condition de roulement sans glissement au niveau du point $I$ impose :

   $$\overrightarrow{v}_{I,\text{cylindre}/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}_{C,\text{cylindre}/\mathcal{R}} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{\text{cylindre}/\mathcal{R}} = b\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + (-a\,\overrightarrow{u_r}) \wedge \dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_z}$$

   On obtient ainsi :

   $$\boxed{b\dot{\theta} = -a\dot{\varphi}}$$

3. Le système est soumis à une force de frottement de glissement mais il n'y a pas de glissement, cette force ne travaille donc pas. In fine, le système est soumis **uniquement à des forces conservatives** (poids du cylindre) ou **qui ne travaillent pas** (réaction du support), l'énergie mécanique du système est donc **conservée** d'après le théorème de l'énergie mécanique.

4. L'énergie cinétique du cylindre en rotation dans $\mathcal{R}$ est :

   $$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(b\dot{\theta})^2$$

   On peut donc écrire, d'après le théorème de l'énergie mécanique :

   $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{b^2}{2a^2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}mgb\theta^2\right) = 0$$

   soit ($\dot{\theta} \neq 0$) :

   $$\frac{b^2}{a^2}J\ddot{\theta} + mb^2\ddot{\theta} + mgb\theta = 0$$

   d'où ($J = \frac{ma^2}{2}$) :

   $$\frac{3}{2}mb^2\ddot{\theta} + mgb\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2g}{3b}\theta = 0}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$\theta(t)$ vérifie donc une équation différentielle de pendule linéarisée en oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3b}}$. La forme des solution est donc :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$$

5. Les énergies cinétique et potentielle ont pour expressions :
   - $\mathcal{E}_c = \frac{3}{4} m b^2 \theta_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \Rightarrow \langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{3}{8} m b^2 \omega_0^2 \theta_0^2 = \frac{1}{4} m g b \theta_0^2$.
   - $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m g b \theta_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \Rightarrow \langle \mathcal{E}_p \rangle = \frac{1}{4} m b g \theta_0^2$

   On remarque que $\boxed{\langle \mathcal{E}_p \rangle = \langle \mathcal{E}_c \rangle}$ (résultat du théorème du viriel).
6. L'application numérique conduit à :

$$\boxed{\langle \mathcal{E}_c \rangle = 0,8 \text{ mJ}}$$

## L'essentiel

### EXERCICE 3 Volant d'inertie (⋆⋆)

1. La puissance fournie au système par le couple de frottement vaut :

$$\mathcal{P}_f = \Gamma_f \omega = -\alpha \omega^2$$

Comme il s'agit d'un couple de frottement, alors forcément $\mathcal{P}_f < 0$ donc $\alpha > 0$.

2. L'équation différentielle se déduit du théorème du moment cinétique.
   - Système : rotor, solide de moment d'inertie $J$ par rapport à l'axe de rotation ;
   - Référentiel : lié au stator, donc probablement le référentiel terrestre, et en tous cas un référentiel galiléen ;
   - Bilan des actions mécaniques :
     — Couple moteur $\Gamma_0$ ;
     — Couple de frottement $\Gamma_f = -\alpha\omega$.

   D'après le théorème du moment cinétique,

$$J \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0 - \alpha\omega$$

ce qui se met sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{\Gamma_0}{J} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J}{\alpha}$$

Le second membre de cette équation est constant, donc on peut chercher une solution particulière constante également,

$$\omega_f = \frac{\tau \Gamma_0}{J} = \alpha \Gamma_0$$

Physiquement, $\omega_f$ correspond à la vitesse de rotation une fois le régime permanent atteint. Ainsi,

$$\omega(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \omega_f$$

La constante $A$ se trouve à partir de la condition initiale $\omega(0) = 0$, d'où :

$$\omega(t) = \omega_f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. L'équation différentielle étant linéaire, on peut à partir du théorème de Fourier reconstruire la réponse à n'importe quelle forme de vibration comme une somme des réponses à des vibrations sinusoïdales. La vibration se traduit comme un second terme de forçage, mais comme le couple qu'elle exerce est indépendant de $\alpha$, elle ne modifie pas le régime transitoire, qui est toujours caractérisé par $\tau = \frac{J}{\alpha}$.
En prenant en compte le couple de vibration, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{\Gamma_0}{J} + \frac{\gamma}{J}\cos(\Omega t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J}{\alpha}$$

Le second membre, le forçage, se compose d'une partie constante et d'une partie harmonique. Comme l'équation différentielle est linéaire, alors d'après le principe de superposition la solution particulière, c'est-à-dire en régime permanent, est la somme des réponses à chaque terme du forçage.
Le cas du terme constant est immédiat. Une solution particulière de l'équation différentielle ne prenant que ce forçage constant,

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{1}{\tau}\omega_f$$

est en effet directement $\omega_{p\text{const}} = \omega_f$.
Cherchons maintenant la réponse au forçage harmonique, solution particulière de l'équation différentielle ne prenant en compte que le forçage harmonique,

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{\gamma}{J}\cos(\Omega t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J}{\alpha}$$

La représentation complexe est la méthode naturelle pour trouver cette solution. Posons donc comme suggéré par l'énoncé $\underline{\omega} = Ae^{j\varphi}e^{j\Omega t}$. L'équation différentielle donne alors

$$j\Omega\underline{\omega} + \frac{1}{\tau}\underline{\omega} = \frac{\gamma}{J}e^{j\Omega t} \quad \text{soit} \quad j\Omega Ae^{j\varphi} + \frac{A}{\tau}e^{j\varphi} = \frac{\gamma}{J} \quad \text{d'où} \quad Ae^{j\varphi} = \frac{\gamma\tau}{J(1+j\Omega\tau)}$$

Remplaçons $\tau$ par $\frac{J}{\alpha}$ et déterminons l'amplitude $A$ à partir du module,

$$\boxed{A = \frac{1}{J}\left|\frac{\gamma\frac{J}{\alpha}}{1+j\Omega\frac{J}{\alpha}}\right|} \quad \text{soit} \quad \boxed{A = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + J^2\Omega^2}}}$$

## EXERCICE 4 Rotation d'un pendule composé (**)

1. Le moment d'inertie peut être sommé s'il est exprimé au même point. On peut donc établir :

$$\boxed{J = I_1 + J_1 = m'\frac{L^2}{3} + m\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right)}$$

2. Une liaison pivot est une **liaison cinématique** avec **un degré de liberté de rotation**.
3. Le système {disque $A$ + tige $OP$} est soumis :
   - au poids de la tige $\overrightarrow{P'} = m'\overrightarrow{g}$ s'exerçant en $C$, de moment en $O$ : $\overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{P'}\right) = -m'g\frac{L}{2}\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_z}$.
   - au poids du disque $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ s'exerçant en $A$, de moment en $O$ : $\overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{P}\right) = -mgL\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_z}$.
   - à une action mécanique de la liaison pivot sur la tige, de résultante $\overrightarrow{R}$ (s'exerçant en O) et de moment nul selon l'axe $(Oz)$ puisque la liaison pivot est parfaite.
4. Le théorème du moment cinétique appliqué au système {tige $OP$ + disque $A$} s'écrit :

$$\boxed{J\ddot{\theta} = -\frac{Lg}{2}\left(m' + 2m\right)\sin(\theta)}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

**5** Aux petits angles, on peut faire l'approximation $\sin(\theta) \simeq \theta$. L'équation différentielle vérifiée par le pendule est :

$$\ddot{\theta} + \frac{\frac{Lg}{2}(m' + 2m)}{J}\theta = 0$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique** dont les solutions sont de la forme :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\frac{Lg}{2}(m' + 2m)}{J}}t\right)}$$

La période des oscillations est donc :

$$\boxed{T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2J}{gL(m' + 2m)}}}$$

**6** Un **couple** est une **action mécanique** de **résultante nulle** mais de **moment non nul** (et **indépendant du point considéré** : il s'agit d'un champ de moments homogène).

**7** En rajoutant le couple de frottements à la liste des actions mécaniques, l'équation différentielle vérifiée par le pendule devient (aux petits angles) :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{J}\dot{\theta} + \frac{\frac{Lg}{2}(m' + 2m)}{J}\theta = 0$$

On peut vérifier cette équation par une approche énergétique :

- L'énergie cinétique du pendule est $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2$.
- L'énergie potentielle du pendule est $\mathcal{E}_p = -m'g\frac{L}{2}\cos(\theta) - mgL\cos(\theta) + \text{cte}$.
- Les forces non conservatives (frottements fluides) exercent une puissance $\mathcal{P} = C\dot{\theta} = -h\dot{\theta}^2$.
- Il n'y a pas de forces intérieures au système qui travaillent.

Le théorème de la puissance mécanique s'écrit ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext, nc}} + \mathcal{P}_{\text{int, nc}}$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 - m'g\frac{L}{2}\cos(\theta) - mgL\cos(\theta) + \text{cte}\right) = -h\dot{\theta}^2$$

En dérivant l'expression contenue dans la dérivée, on obtient :

$$J_1\dot{\theta}\ddot{\theta} + I_1\dot{\theta}\ddot{\theta} + m'g\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin(\theta) + mgL\dot{\theta}\sin(\theta) = -h\dot{\theta}^2$$

En simplifiant par $\dot{\theta}$ (puisque $\dot{\theta} \neq 0$) on obtient :

$$J_1\ddot{\theta} + I_1\ddot{\theta} + m'g\frac{L}{2}\sin(\theta) + mgL\sin(\theta) = -h\dot{\theta}$$

soit, aux petits angles :

$$(J_1 + I_1)\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \left(m'g\frac{L}{2} + mgL\right)\theta = 0$$

ou encore, avec $I_1 + J_1 = J$ :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{h}{J}\dot{\theta} + \frac{m'g\frac{L}{2} + mgL}{J}\theta = 0}$$

L'équation différentielle retrouvée est donc bien identique.

8 L'équation caractéristique est de la forme :

$$r^2 + \frac{h}{J}r + \frac{m'g\frac{L}{2} + mgL}{J} = 0$$

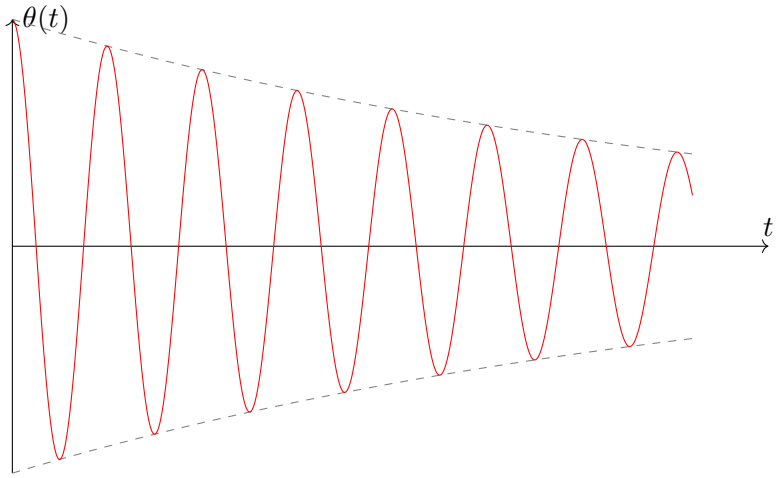
Les racines sont :

$$r_{1,2} = -\frac{h}{2J} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\frac{m'g\frac{L}{2} + mgL}{J} - \frac{h^2}{J^2}}$$

La solution $\theta(t)$ est donc :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{m'g\frac{L}{2} + mgL}{J} - \frac{h^2}{J^2}}t\right) e^{-\frac{h}{2J}t}}$$

9 Le frottement fluide est responsable d'une atténuation du signal dans une enveloppe exponentielle.




## EXERCICE 5 Masse et poulie (⋆⋆)

1 L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ du système {masse $A$+poulie+ressort} est une grandeur additive :

$$\mathcal{E}_c(\dot{z}, \dot{Z}) = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J_{O_y}\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{Z}^2$$

L'énergie potentielle du système est identifiée à partir du travail :

- de la force de pesanteur sur $A$
- de la force de pesanteur sur la poulie
- de la force de rappel élastique du ressort sur la poulie.

On obtient :

$$\mathcal{E}_p(z, Z) = Mgz + mgZ + \frac{1}{2}k(\ell_{\text{éq}} + Z - \ell_0)^2$$

Il est possible de relier les grandeurs cinématiques $z$ et $Z$ en supposant que la corde est toujours tendue sur la poulie et frotte sans glisser :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\overrightarrow{v}_{I,\text{poulie/fil}} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}_{I,\text{poulie}/\mathcal{R}} - \overrightarrow{v}_{I,\text{fil}/\mathcal{R}}$$

avec :

$$\overrightarrow{v}_{I,\text{fil}/\mathcal{R}} = \dot{z}\,\overrightarrow{u_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_{I,\text{poulie}/\mathcal{R}} = \overrightarrow{v}_{O,\text{poulie}/\mathcal{R}} + \overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{\text{poulie}/\mathcal{R}} = \dot{Z}\,\overrightarrow{u_z} - R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z} \Rightarrow \boxed{\dot{z} = \dot{Z} + R\dot{\theta}}$$

De la même manière, en appliquant la même condition au point $J$ :

$$\overrightarrow{v}_{J,\text{poulie/fil}} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}_{J,\text{poulie}/\mathcal{R}} - \overrightarrow{v}_{J,\text{fil}/\mathcal{R}}$$

avec :

$$\overrightarrow{v}_{J,\text{fil}/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_{J,\text{poulie}/\mathcal{R}} = \overrightarrow{v}_{O,\text{poulie}/\mathcal{R}} + \overrightarrow{JO} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{\text{poulie}/\mathcal{R}} = \dot{Z}\,\overrightarrow{u_z} - R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z} \Rightarrow \boxed{\dot{Z} = R\dot{\theta}}$$

On en déduit donc que $\boxed{\dot{z} = 2\dot{Z} = 2R\dot{\theta}}$.

L'énergie mécanique du système est donc :

$$\mathcal{E}_m(z,\dot{z}) = \left(\frac{M}{2} + \frac{m}{8} + \frac{J_{O_y}}{8R^2}\right)\dot{z}^2 + \left(M + \frac{m}{2}\right)gz + +\frac{1}{2}k(\ell_{\text{éq}} + \frac{z}{2} - \ell_0)^2$$

soit, avec $J_{O_y} = \frac{mR^2}{2}$ :

$$\boxed{\mathcal{E}_m(z,\dot{z}) = \left(\frac{M}{2} + \frac{3m}{16}\right)\dot{z}^2 + \left(M + \frac{m}{2}\right)gz + \frac{1}{2}k(\ell_{\text{éq}} + \frac{z}{2} - \ell_0)^2}$$

2. Le système étant conservatif en l'absence de forces de dissipations, l'énergie mécanique se conserve d'après le théorème de l'énergie mécanique. On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{M}{2} + \frac{3m}{16}\right)\ddot{z}\dot{z} + \left(M + \frac{m}{2}\right)g\dot{z} + \frac{1}{2}k\dot{z}(\ell_{\text{éq}} + \frac{z}{2} - \ell_0) = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\left(\frac{M}{2} + \frac{3m}{16}\right)\ddot{z} + \frac{1}{8}kz = \text{cte}$$

soit :

$$\ddot{z} + \frac{k}{4M + \frac{3m}{2}}z = \text{cte}$$

La pulsation propre des oscillations est donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4M+\frac{3m}{2}}}$. La période des petites oscillations est ainsi :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{4M + \frac{3m}{2}}{k}}}$$

## Pour aller plus loin

### EXERCICE 6 Le pendule pesant (⋆⋆)

1. Le barycentre étant situé au milieu de la tige homogène, on en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{OG_t} = \frac{L}{6}\,\overrightarrow{u_r}}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

**2** Pour équilibrer le pendule, il faut que :

$$m_t\overrightarrow{OG_t} + 4m\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$$

Dans la direction $\overrightarrow{u_r}$, cela s'écrit :

$$\frac{m_t L}{6} - 4mh = 0 \Rightarrow \boxed{h = \frac{m_t L}{24m}}$$

**3** Le moment d'inertie du pendule équilibré devient ainsi :

$$\boxed{J_0 = \frac{m_t L^2}{9} + 4mh^2 = \frac{m_t L^2}{9} + 4\frac{m_t^2 L^2}{24^2 m}}$$

**4** Le moment d'inertie du pendule avec les deux masselottes devient :

$$\boxed{J = J_0 + 2m\ell^2}$$

**5** Le pendule, constitué par la tige équilibrée et le deux masselottes en $A$, étudié dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, sont soumises :

- au poids $\overrightarrow{P}_0 = (m_t + 4m)\overrightarrow{g}$ du pendule équilibré, s'appliquant en $O$ (si le pendule est équilibré), donc n'exerçant aucun moment en $O$ (puisqu'il s'agit du point d'application) ni aucun travail (puisque $O$ est fixe dans $\mathcal{R}$).
- au poids des masselottes en $A$ : $\overrightarrow{P}_A = 2m\overrightarrow{g}$, exerçant en $O$ un moment $\overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{P}_A\right) = -2m\ell g\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_z}$ et dérivant de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_{\text{pes}}} = 2mg\ell\,(1-\cos(\theta))$.
- Aux frottements visqueux de l'air, ici négligés par défaut.
- Aux frottements secs dans la liaison pivot. Ici, on suppose par défaut la liaison comme étant parfaite, exerçant donc sur le système une action mécanique du type :

$$\{\mathcal{T}(\text{bâti} \to \text{pendule})\} = \begin{Bmatrix} F_x & M_x \\ F_y & M_y \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{R}}$$

**a.** Le théorème du moment dynamique, appliqué au point $O$, au système { pendule équilibré + masselottes}, étudié dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, s'écrit, en projection sur l'axe $\overrightarrow{u_z}$ :

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -2m\ell g\sin(\theta)$$

L'équation différentielle vérifiée par le pendule est donc :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2m\ell g}{J}\sin(\theta) = 0}$$

**b.** Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système { pendule équilibré + masselottes}, étudié dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

avec :

- $\mathcal{E}_k$ l'énergie cinétique de l'ensemble du pendule en mouvement, soit :

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k_0} + \mathcal{E}_{k_A} = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(2m)\underbrace{(\ell\dot{\theta})^2}_{\overrightarrow{v}_{A/\mathcal{R}}} = \frac{1}{2}(J_0 + 2m\ell^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

- La puissance des actions mécaniques intérieures $\mathcal{P}_{\text{int}}$, nulle puisque qu'il s'agit de plusieurs solides solidement encastrées pouvant être considérés comme un unique solide indéformable.
  NB : Que la liaison pivot soit ou non ajoutée au système, elle ne dissipe aucune puissance mécanique, étant parfaite.
- La puissance des actions mécaniques extérieures au système $\mathcal{P}_{\text{ext}}$ :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \overrightarrow{P}_A \cdot \overrightarrow{v}_{A/\mathcal{R}} = -2mg\sin(\theta) \times \ell\dot{\theta}$$

Le théorème de la puissance cinétique s'écrit donc :

$$J\ddot{\theta}\dot{\theta} = -2mg\sin(\theta) \times \ell\dot{\theta}$$

soit pour $\dot{\theta} \neq 0$ :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2mg\ell}{J}\sin(\theta) = 0}$$

On retrouve, bien entendu, la même équation différentielle.

6. Pour les petits angles, $\sin(\theta) \simeq \theta$, soit :

$$\ddot{\theta} + \frac{2mg\ell}{J}\theta \simeq 0$$

La solution de cette équation différentielle d'oscillateur harmonique est donc de la forme :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2mg\ell}{J}}t\right)}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2mg\ell}{J}}$ la pulsation propre du pendule.

## EXERCICE 7 Satellite tournant (⋆⋆⋆)

1. En l'absence d'actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système, on peut écrire le théorème du moment dynamique dans un référentiel $\mathcal{R}$ considéré comme galiléen :

$$\overset{\hookrightarrow}{\delta}_{G/\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \left.\frac{\mathrm{d}\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_{G/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overset{\hookrightarrow}{0}$$

D'après la formule de Bour, on peut donc écrire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_{G/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overset{\hookrightarrow}{0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_{G/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_p} + \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_{G/\mathcal{R}}(\mathcal{S})$$

Or, $\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_{G/\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = [I_G(\mathcal{S})]\,\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = J_x\Omega_x\overrightarrow{u_{x_p}} + J_y\Omega_y\overrightarrow{u_{y_p}} + J_z\Omega_z\overrightarrow{u_{z_p}}$
On obtient donc :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}J_x\Omega_x\\J_y\Omega_y\\J_z\Omega_z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Omega_x\\\Omega_y\\\Omega_z\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}J_x\Omega_x\\J_y\Omega_y\\J_z\Omega_z\end{pmatrix}$$

soit :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& J_x\dot{\Omega}_x + J_z\Omega_z\Omega_y - J_y\Omega_y\Omega_z \\ 0 &=& J_y\dot{\Omega}_y + J_x\Omega_x\Omega_z - J_z\Omega_z\Omega_x \\ 0 &=& J_z\dot{\Omega}_z + J_y\Omega_y\Omega_x - J_x\Omega_x\Omega_y \end{array}\right.$$

On retrouve ainsi les équations d'Euler du mouvement.

2. Dans la base principale d'inertie du solide, on peut écrire :

$$[I_G(\mathcal{S})] = \begin{bmatrix} 2m\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & M\frac{\ell^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & M\frac{\ell^2}{4} + 2m\rho^2 \end{bmatrix}$$

Le cas $A$ correspond donc à $\rho < \rho_c = \ell\sqrt{\frac{M}{8m}}$ et le cas $B$ à $\rho > \rho_c = \ell\sqrt{\frac{M}{8m}}$.

On peut donc écrire $\frac{M\ell^2}{4} = 2m\rho_c^2$, soit $J_x = 2m\rho^2$, $J_y = 2m\rho_c^2$ et $J_z = J_x + J_y = 2m(\rho^2 + \rho_c^2)$.

3. Ce cadre d'étude correspond à *l'approximation gyroscopique*. On pourra donc écrire $\Omega_x \simeq \Omega_0$, $\Omega_y = \omega_y$, $\Omega_z = \omega_z$ avec $\Omega_y \ll \Omega_0$ et $\Omega_z \ll \Omega_0$.

**a.** Les équations d'Euler sont ainsi approximées (on se souviendra, de plus, que $J_z = J_x + J_y$) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& \dot{\omega_x} + \omega_z\omega_y \\ 0 &\simeq& \dot{\omega_y} - \Omega_0\omega_z \\ 0 &\simeq& J_z\dot{\omega_z} + (J_y - J_x)\Omega_0\omega_y \end{array}\right.$$

Au premier ordre, on a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\omega_x} &=& -\omega_z\omega_y \\ 0 &\simeq& J_z\ddot{\omega_y} - \Omega_0 J_z\dot{\omega_z} \\ 0 &\simeq& J_z\dot{\omega_z} + (J_y - J_x)\Omega_0\omega_y \end{array}\right.$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\omega_x} &=& -\omega_z\omega_y \\ 0 &\simeq& \ddot{\omega_y} + \left(1 - \frac{2J_x}{J_z}\right)\Omega_0^2\omega_y \\ 0 &\simeq& \ddot{\omega_z} + \left(1 - \frac{2J_x}{J_z}\right)\Omega_0^2\omega_z \end{array}\right.$$

On peut donc poser $K = \left(1 - \frac{2J_x}{J_z}\right)\Omega_0^2 = \frac{\rho_c^2 - \rho^2}{\rho^2 + \rho_c^2}\Omega_0^2$ de sorte que :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} 0 &\simeq& \ddot{\omega_y} + K\omega_y \\ 0 &\simeq& \ddot{\omega_z} + K\omega_z \end{array}\right.}$$

Le théorème de l'énergie cinétique nous renseigne, de plus, que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_x(\Omega_0 + \omega_x)^2 + \frac{1}{2}J_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}J_z\omega_z^2\right) = 0$$

soit :

$$J_x \underbrace{\dot{\omega}_x}_{-\omega_z\omega_y}(\Omega_0 + \omega_x) + J_y\Omega_0\omega_y\omega_z + (J_z - 2J_x)\Omega_0\omega_x\omega_y \simeq 0$$

d'où :

$$\omega_x \simeq \frac{J_y\Omega_0 + (J_z - 2J_x)\Omega_0}{J_x} - \Omega_0 = 2\left(\frac{\rho_c^2}{\rho^2} - 1\right)\Omega_0 \Rightarrow \boxed{\dot{\omega}_x \simeq 0}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

**b.**
- Situation $A$ : $\rho \leq \rho_c$ soit $K \geq 0$ :
On reconnaît un système d'équation de deux équations différentielles d'oscillateur harmonique de même pulsation $\Omega_p = \sqrt{K} = \Omega_0\sqrt{\frac{\rho_c^2-\rho^2}{\rho^2+\rho_c^2}}$, soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \omega_y &=& \alpha_y \cos(\sqrt{K}t + \varphi_y) \\ \omega_z &=& \alpha_z \cos(\sqrt{K}t + \varphi_z) \end{array}\right.$$

Autrement dit, le vecteur rotation instantané du satellite $\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$ (ou son axe de rotation, ça revient au même) oscille elliptiquement dans le plan $(y,z)$ à la pulsation $\Omega_p = \sqrt{K} = \Omega_0\sqrt{1-\frac{2\rho^2}{\rho^2+\rho_c^2}}$ : il s'agit d'un mouvement de *précession* de l'axe de rotation autour de l'axe $(G, \overrightarrow{u_{x_p}})$.
- Situation $B$ : $\rho \geq \rho_c$, soit $K \leq 0$ :
Les solutions sont alors de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \omega_y &=& \alpha_y e^{-\sqrt{-K}t} + \beta_y e^{\sqrt{-K}t} \\ \omega_z &=& \alpha_z e^{-\sqrt{-K}t} + \beta_z e^{\sqrt{-K}t} \end{array}\right.$$

Comme $\omega_y$ et $\omega_z$ ne peuvent croître éternellement, on en déduit que $\beta_y = 0$ et $\beta_z = 0$, soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \omega_y &=& \alpha_y e^{-\sqrt{-K}t} \\ \omega_z &=& \alpha_z e^{-\sqrt{-K}t} \end{array}\right.$$

L'axe de rotation se stabilise donc dans la direction $\overrightarrow{u}_{x_p}$ sans avoir de mouvement de précession autour de l'axe $(O, \overrightarrow{u}_{x_p})$.

**c.** Si l'objet présentait $4$ masselottes et non $2$, alors $J_y = J_z$. De fait, $\dot{\Omega}_x = 0 \Rightarrow \Omega_x = \Omega_0 + \omega_x = \text{cte}$. De plus, l'ellipse décrite par le vecteur $\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$ sera un cercle (puisque $J_y = J_z$).

## EXERCICE 8 Billes de néodyme (⋆⋆⋆)

1. Les longueurs sur lesquelles les deux sphères ont roulé est $R\theta$ pour la bille fixe et $R(\theta_1 - \theta)$ pour la bille mobile. En l'absence de glissement, ces deux longueurs sont égales donc :

$$\boxed{\theta_1 = 2\theta}$$

2. Le bilan des forces est le suivant :
- Pour la bille fixe :
  - Force de pesanteur : dérive d'une énergie potentielle du type $mgz + \text{cte}$
  - La réaction du support (globalement orientée vers le haut, sans plus de précision)
  - La force de la bille mobile, de droite support $O_1O$.
  - Interaction magnétique liée à la bille mobile (dérivant de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_B$)
- Pour la bille mobile :
  - Force de pesanteur : dérivant du potentiel $mgD(\cos(\theta) - 1)$
  - Force de la bille fixe, de droite support $O_1O$.
  - Interaction magnétique liée à la bille fixe.

D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système {bille mobile + fixe}, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_{c,1} + \mathcal{E}_{c,0} + \mathcal{E}_{p,1} + \mathcal{E}_B\right) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\overrightarrow{F}_{\text{NC}}) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\overrightarrow{F}_{\text{NC}})$$

Comme l'ensemble des deux billes n'est soumis qu'à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas, l'énergié mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{c,1} + \mathcal{E}_{c,0} + \mathcal{E}_{p,1} + \mathcal{E}_B$ de l'ensemble ne varie pas.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. On peut écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_\infty} = \mathcal{M}(\cos(\theta_1 - \theta)\ \overrightarrow{u_r} + \sin(\theta_1 - \theta)\ \overrightarrow{u_\theta}) = \mathcal{M}(\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_r} + \sin(\theta)\ \overrightarrow{u_\theta})}$$

4. Le champ magnétique créé par la bille fixe au niveau du point $O_1$ s'écrit :

$$\overset{\hookrightarrow}{B}(O_1) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_r} + \sin(\theta)\ \overrightarrow{u_\theta})$$

L'énergie magnétique d'interaction entre la bille mobile et le champ magnétique de la bille fixe est ainsi :

$$\mathcal{E}_B = -\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overset{\hookrightarrow}{B} + \text{cte} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi D^3}(2\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) + \text{cte}$$

soit :

$$\mathcal{E}_B = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{2\pi D^3} + \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi D^3}\sin^2(\theta) + \text{cte}$$

Pour obtenir la forme demandée, il faut choisir la constante de telle sorte que cte $= \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{2\pi D^3}$, soit :

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2} K \sin^2(\theta)$$

avec $\boxed{K = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{2\pi D^3}}$.

5. L'énergie cinétique de la bille mobile est :

$$\mathcal{E}_{c,1} = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}}}^2 + \frac{1}{2}\frac{mD^2}{10}\dot{\theta}_1^2$$

avec $\overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}}}^2 = D^2\dot{\theta}^2$, soit :

$$\mathcal{E}_{c,1} = \frac{1}{2}\left(mD^2 + \frac{4mD^2}{10}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}J'\dot{\theta}^2$$

avec $\boxed{J' = mD^2 + \dfrac{4mD^2}{10} = \dfrac{7}{5}mD^2}$.

On remarque qu'il sagit en fait du théorème de König :

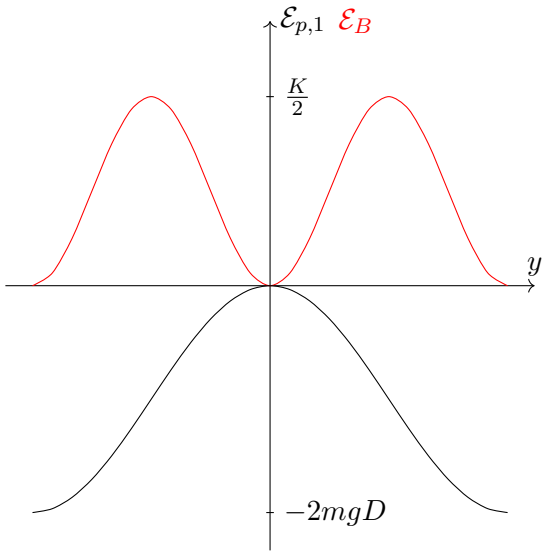
$$\mathcal{E}_{c,1} = \underbrace{\frac{1}{2} m \overrightarrow{v_{O_1/\mathcal{R}}}^2}_{\text{Énergie du barycentre du solide}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{mD^2}{10}\dot{\theta}_1^2}_{\text{Énergie cinétique propre}}$$

6. L'énergie potentielle gravitationnelle de la bille mobile est :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,1} = mgD(\cos(\theta) - 1)}$$

7. L'allure des deux courbes est représentée ci-dessous :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/




8 En utilisant l'expression du théorème de l'énergie mécanique, établie précédemment, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J'\dot{\theta}^2 + mgD(\cos(\theta)-1) + \frac{1}{2}K\sin^2(\theta)\right) = 0$$

soit :

$$J'\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgD\dot{\theta}\sin(\theta) + K\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta) = 0$$

en remarquant que $\dot{\theta} \neq 0$, on a :

$$\boxed{J'\ddot{\theta} - mgD\sin(\theta) + \frac{K}{2}\sin(2\theta) = 0}$$

9 L'énergie potentielle totale du système est $\mathcal{E}_p = mgD(\cos(\theta)-1) + \frac{1}{2}K\sin^2(\theta)$. La stabilité de la position d'équilibre $\theta = 0$ se trouve avec le signe de $\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2} = -mgD\cos(\theta) + K\cos(2\theta)$$

Pour $\theta = 0$, $\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2} > 0 \Leftrightarrow K \geq mgD$, soit :

$$\underset{\text{stable}}{\boxed{S > 1}} \quad \text{et} \quad \underset{\text{instable}}{\boxed{S \leq 1}}$$

Ce rapport est le rapport des énergies magnétique sur l'énergie potentielle $S = \frac{\frac{1}{2}K\sin^2(\theta)}{mgD(\cos(\theta)-1)} \simeq \frac{\frac{1}{2}K\theta^2 + \circ(\theta^2)}{\frac{1}{2}mgD\theta^2 + \circ(\theta)} = \frac{K}{mgD}$

10 En linéarisant l'équation, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgD}{J'}(S-1)\theta = 0$$

On obtient des oscillations que si $S > 1$, de pulsation propre :

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{mgD}{J'}(S-1)} = \sqrt{\frac{5g}{7D^2}(S-1)}}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/