Mouvement d'un solide indéformable

Les théorèmes et lois énoncés dans les précédents chapitres de mécanique étaient appliquables à un point matériel ou à un système assimilable à un point matériel. Ce chapitre à pour but d'étendre les notions vues en mécanique du point au contexte plus général de la mécanique du solide en faisant un lien avec le programme de *sciences industrielles* mais en se bornant à des applications restreintes et à des cas d'études classiques.

Les résultats de la mécanique du point sont d'abord étendus à un système constitué de N points matériels avant d'évoquer le cas d'un ensemble continu de points formant un solide.

Table des matières

1 Système de N particules ponctuelles 1
1.1 Barycentre et référentiel barycentrique 1
1.2 Vecteurs cinématiques 2
2 Mouvement d'un solide indéformable 7
2.1 Définition d'un solide indéformable 8
2.2 Translation et rotation 9
2.3 Transmission des actions mécaniques 11
2.4 Équations du mouvement d'un solide en référentiel galiléen 12
2.5 Théorèmes énergétiques 16

1 Système de N particules ponctuelles

1.1 Barycentre et référentiel barycentrique

Lorsque plusieurs particules sont étudiées au sein d'un même système dans un référentiel $\mathcal{R}$ (galiléen ou non), un point est important à étudier : le *barycentre* G (ou *centre de masse*). En considérant que les N particules ont des masses m_i, $1 \leq i \leq N$, le *barycentre* G est défini comme étant la *moyenne des vecteur-position* $\overrightarrow{OM_i}$ de chaque particule pondérée par sa masse m_i :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + \ldots + m_N\overrightarrow{OM_N}}{m_1 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

Remarques :

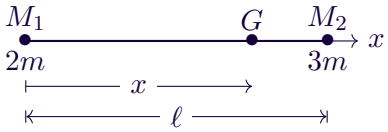
- On prend comme convention de noter $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ la masse totale du système constitué des N particules.
- O est choisi ici comme l'origine du repère associé à $\mathcal{R}$, mais on peut tout aussi bien choisir un point A quelconque.
- On peut remarquer, en somme, que si l'on choisi l'origine du repère en $O = G$, la relation précédente implique que :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}}$$

On retiendra cette relation pour identifier la position du barycentre d'un système de points.

Application 1

❶ Dans la situation représentée ci-contre, préciser la position du barycentre.



a. Depuis M_1 : $\overrightarrow{M_1G} = \frac{3m}{5m}\overrightarrow{M_1M_2}$, soit $x = \frac{3}{5}\ell$.

b. Depuis G : $\overrightarrow{0} = \frac{2m}{5m}\overrightarrow{GM_1} + \frac{3m}{5m}\overrightarrow{GM_2} = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}(\ell - x)$, soit $x = \frac{3}{5}\ell$.

c. Depuis M_2 : $\overrightarrow{M_2G} = \frac{2m}{5m}\overrightarrow{M_2M_1}$, soit $-(\ell - x) = -\frac{2}{5}\ell \Rightarrow x = \frac{3}{5}\ell$.

On nomme *référentiel barycentrique*, que l'on notera $\mathcal{R}^\star$, un référentiel associé au système S tel que le barycentre G de S soit immobile dans $\mathcal{R}^\star$. On a ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}^\star} = \overrightarrow{0}}$$

Remarques :

- G peut être l'origine du repère associé à $\mathcal{R}^\star$ ou un point quelconque fixe par rapport à l'origine $O^\star$ de ce repère.
- $\mathcal{R}^\star$ est, a priori, **non galiléen**.

1.2 Vecteurs cinématiques

1.2.1 Quantité de mouvement de plusieurs points

La *quantité de mouvement* est une grandeur additive. La quantité de mouvement $\overrightarrow{p}_{S/\mathcal{R}}$ du système S dans le référentiel $\mathcal{R}$ est la somme des quantités de mouvement des N particules :

$$\boxed{\overrightarrow{p}_{S/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p}_{M_i/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}}}$$

La quantité de mouvement de S dans $\mathcal{R}$ est celle de son barycentre G auquel on a affecté toute la masse m du système S.

Démonstration

Par additivité de la quantité de mouvement, on peut écrire :

$$\overrightarrow{p}_{S/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\mathrm{d}\left(m_i\overrightarrow{OM_i}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

La somme de dérivées étant la dérivée de la somme, on peut écrire :

$$\overrightarrow{p}_{S/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_i}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

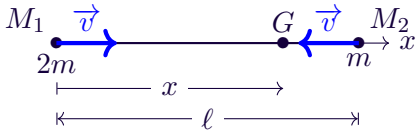
or $\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_i} = m\overrightarrow{OG}$ par définition du barycentre, on peut donc écrire, pour un système fermé ($m = \text{cte}$) :

$$\overrightarrow{p}_{S/\mathcal{R}} = m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Application 2

On considère la situation représentée ci-contre. M_1 et M_2 évoluent à la vitesse $\overrightarrow{v}$ (sens opposés) dans le référentiel $\mathcal{R}$. On peut ainsi exprimer :



1. $\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}}} = 2m\overrightarrow{v} - m\overrightarrow{v} = m\overrightarrow{v}$.
2. $\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}_1}} = 0 + m \times (-2\overrightarrow{v}) = -2m\overrightarrow{v}$.
3. $\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}_2}} = 2m \times (2\overrightarrow{v}) = +4m\overrightarrow{v}$.
4. $\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}^\star}} = 2m \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}^\star} + m \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}^\star} = \left.\frac{\mathrm{d}(2m\overrightarrow{GM_1}+m\overrightarrow{GM_2})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}^\star} = \overrightarrow{0}$.

☞ On remarque ici l'importance du référentiel barycentrique dans lequel la quantité de mouvement du système est toujours nulle.

Le *principe fondamental de la dynamique* appliqué à un système S constitué de N particules M_i de masse m_i, étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, s'écrit donc :

$$\boxed{m \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F}}$$

avec :

- m la masse totale du système S.
- G le barycentre du système S.
- $\overrightarrow{F}$ la résultante de toutes les forces s'appliquant sur le système (même si leur point d'application n'est pas le même).

1.2.2 Moment cinétique d'un système de points

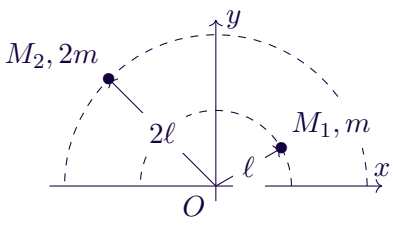
Le moment cinétique d'un ensemble de points M_i par rapport à un point O ou un axe (Δ) est également une grandeur additive.

On définit ainsi le moment $\overrightarrow{\mathcal{L}}_O(S)$ du système S en O par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{L}}_O(S) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\mathcal{L}}_O(M_i) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM_i} \wedge (m_i \overrightarrow{v}_{M_i/\mathcal{R}})}$$

Application 3

On considère deux masses ponctuelles M_1 et M_2 de masses respectives m et $2m$ tournant autour du point O à la vitesse de rotation ω.



1. On peut ainsi exprimer :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}}_O(M_1) = m\ell^2\omega\,\overrightarrow{u_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathcal{L}}_O(M_2) = (2m)(2\ell)^2\omega = 8m\ell^2\omega\,\overrightarrow{u_z}$$

soit :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{L}}_O(S) = \overrightarrow{\mathcal{L}}_O(M_1) + \overrightarrow{\mathcal{L}}_O(M_2) = 9m\ell^2\omega\,\overrightarrow{u_z}}$$

☞ On peut d'ores et déjà constater la contribution majoritaire au moment cinétique des points massifs éloignés de l'axe de rotation.

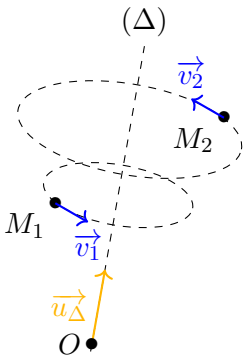
On définit le moment cinétique de S par rapport à un axe (Δ) de manière analogue à la définition donnée pour un point matériel :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\boxed{\mathcal{L}_{(\Delta)}(S) \doteq \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(S) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

avec O un point de l'axe (Δ) et $\overrightarrow{u_\Delta}$ un vecteur unitaire orientant l'axe (Δ).
On peut vérifier notamment que :

$$\boxed{\mathcal{L}_{(\Delta)}(S) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}_{(\Delta)}(M_i)}$$



Démonstration

Comme le moment cinétique par rapport à un point O est additif, on a, par définition du moment cinétique par rapport à l'axe (Δ) :

$$\mathcal{L}_{(\Delta)}(S) = \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(S) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\sum_{i=1}^{N} \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(M_i) \right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Comme $\overrightarrow{u_\Delta}$ est un vecteur constant qui ne dépend pas de chaque point M_i, on peut écrire :

$$\mathcal{L}_{(\Delta)}(S) = \sum_{i=1}^{N} \left(\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(M_i) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \right) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}_{(\Delta)}(M_i)$$

Dans le cas d'un système S composé de N particules massiques M_i, le moment cinétique $\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(S)$ peut être exprimé à l'aide du *premier théorème de König* :

$$\boxed{\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(M) = \overset{\hookrightarrow}{L^\star} + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$$

avec $\overset{\hookrightarrow}{L^\star}$ le *moment cinétique propre* des N points matériels par rapport à G dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^\star$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$.

Démonstration

Par définition du moment cinétique d'un système S constitué de N points massiques M_i, de masse m_i, on a :

$$\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(S) = \sum_{i=1}^{N} \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(M_i)$$

Or, le moment cinétique du point M_i peut être déplacé du point O au point G avec la relation établie dans le cours sur le moment cinétique du point matériel :

$$\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(M_i) = \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_G(M_i) + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p_{M_i/\mathcal{R}}}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(S) = \sum_{i=1}^{N} \left(\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_G(M_i) + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p_{M_i/\mathcal{R}}} \right) = \sum_{i=1}^{N} \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_G(M_i) + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p_{M_i/\mathcal{R}}}$$

$\overrightarrow{OG}$ étant un vecteur indépendant du point M_i considéré, on a alors :

$$\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(S) = \sum_{i=1}^{N} \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_G(M_i) + \overrightarrow{OG} \wedge \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p_{M_i/\mathcal{R}}} = \sum_{i=1}^{N} \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_G(M_i) + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$$

Il faut donc interpréter le terme $\sum_{i=1}^{N} \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_G(M_i)$. Par composition des vitesses, $\overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$. En choisissant un référentiel barycentrique $\mathcal{R}^\star$ en **TRANSLATION** par rapport à $\mathcal{R}$, on a $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}^\star}$. G étant un point fixe de $\mathcal{R}^\star$, on peut écrire :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}^\star} = \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}} \Rightarrow \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}}$$

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\mathcal{L}}_G(M_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GM_i} \wedge (\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \overrightarrow{GM_i}\right)}_{\overrightarrow{0}} \wedge \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GM_i} \wedge (m_i \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}})}_{\overrightarrow{L^\star}}$$

$\overrightarrow{L^\star}$ s'interprète comme étant le moment cinétique des N points matériels M_i au niveau du barycentre G du système, dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^\star$ (où G est donc un point fixe).

1.2.3 Énergie cinétique d'un système de points

L'énergie cinétique est une grandeur additive. Pour N points matériels M_i de masse m_i et de vitesse $\overrightarrow{v}_{M_i/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel d'étude $\mathcal{R}$, on définit l'énergie cinétique du système S dans $\mathcal{R}$ par :

$$\boxed{\mathcal{E}_c(S) \triangleq \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_c(M_i)}$$

Le *deuxième théorème de König* permet d'exprimer cette quantité en fonction de la trajectoire du barycentre G de S :

$$\boxed{\mathcal{E}_c(S) = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}^2 + \mathcal{E}_c^\star}$$

avec m la masse totale du système et $\mathcal{E}_c^\star$ l'énergie cinétique des N particules ponctuelles M_i évaluée dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^\star$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$.

Remarques :

- Ce théorème sera utilisé pour introduire le concept d'*énergie interne* U en thermodynamique.
- Ce théorème sera également utile pour les éléments de *thermodynamique statistique* abordés en cours de deuxième année.

Démonstration

Par définition,

$$\mathcal{E}_c(S) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}}}^2$$

Par composition des vitesses, on a vu que $\overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}}$ à condition que le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^\star$ soit en **TRANSLATION** par rapport à $\mathcal{R}$. On a alors :

$$\mathcal{E}_c(S) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} \cdot \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}}^2$$

Les vecteurs dépendant uniquement du point G sont donc indépendants de la position de M_i et peuvent être extraits des signes somme :

$$\mathcal{E}_c(S) = \frac{1}{2} \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{m} + \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}}\right)}_{\overrightarrow{0}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}}^2$$

soit :

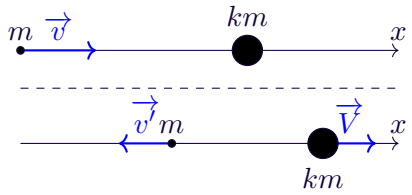
$$\mathcal{E}_c(S) = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}}^2$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Le terme $\mathcal{E}_c^\star = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}}^2$ s'interprête comme étant la somme des énergies cinétiques de chaque point M_i dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^\star$.

Application 4

Un neutron de masse m, de vitesse v, heurte un noyau de masse km au repos.
On considère le système {neutron+atome}



1. La quantité de mouvement du système selon l'axe (Ox) est conservée lors du choc, donc :

$$mv = (-mv' + kmV)$$

L'énergie cinétique du système est également conservée :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kmV^2$$

soit :

$$v = -v' + kV \quad \text{et} \quad v^2 - v'^2 = (v+v')(v-v') = kV^2$$

d'où :

$$\boxed{\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m\frac{(k-1)^2}{(k+1)^2}v^2 = \frac{(k-1)^2}{(k+1)^2}\mathcal{E}_0}$$

2. Pour un choc, l'énergie cinétique du neutron est divisée par $K = \frac{(k-1)^2}{(k+1)^2}$, donc pour N chocs, elle sera divisée par K^N. Il faut donc $K^N = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_N} \Rightarrow N = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_N}\right)}{\ln(K)}$.
   - **a.** Pour des noyaux d'hydrogène ($k = 1$), on trouve $N \geq 1$.
   - **b.** Pour des noyaux de deutérium ($k = 2$), on trouve $N \geq 8$ (avec $K = 9$).
   - **c.** Pour des noyaux de carbone ($k = 3$), on trouve $N \geq 53$ (avec $K = 1,4$).
3. L'élément le plus efficace pour ralentir les neutrons est l'élément le plus léger : l'hydrogène.
   Dans le cas réel, toutes les vitesses avant et après le choc ne sont pas nécessairement co-linéaires. Les conclusions sur les mérites relatifs des éléments pour le ralentissement desneutrons restent cependant inchangées.
   N.B. : l'énergie de $0,025$ eV correspond aux neutrons en équilibre thermique à 20 °C dans le milieu dans lequel ils se propagent.

1.2.4 Énergie potentielle électrostatique

L'énergie potentielle électrostatique d'un ensemble de N particules chargées, de charge électrique q_i est :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p_{\text{élec}}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} q_i V_j(M_i)}$$

où $V_j(M_i)$ est le *potentiel électrique* créé par les $N-1$ autres charges électriques (indicées « j »), placées à une distance r_{ij} de la charge q_i :

$$\boxed{V_i(M_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}}}$$

Démonstration

On considère une particule M_1, de charge électrique q_1, à laquelle on fixe un référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Pour approcher une particule M_2, de charge q_2, depuis l'infini, un opérateur devra fournir le travail :

$$W_{\text{op}_{2\to1}} = q_2 V_1(M_2)$$

La relativité du mouvement implique que l'opérateur consacre un même travail à rapprocher la particule M_1 depuis l'infini, soit :

$$W_{\text{op}_{1\to2}} = q_1 V_2(M_1) = W_{\text{op}_{2\to1}}$$

Finalement, pour l'approche de deux particules, on peut écrire que :

$$W_{\text{op}_{2\to1}} = \frac{1}{2}\left(q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2)\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Avec $r_{12} = M_1M_2$. En ajoutant une troisième particule M_3, de charge q_3, on obtient :

$$W_{\text{op}_{3\to1+2}} = q_3\left(V_{1+2}(M_3)\right) = q_3(V_1(M_3) + V_2(M_3))$$

Le travail dépensé par l'opérateur sera ainsi :

$$W_{\text{tot}} = W_{\text{op}_{2\to1}} + W_{\text{op}_{3\to1+2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_1q_2}{r_{31}}\right)$$

On peut ainsi conjecturer que pour approcher la $i-$ième particule M_i, de charge q_i dans le champ de potentiel $V(M_i)$ créé par les $i-1$ autres charges électriques q_j, le travail dépensé par l'opérateur sera :

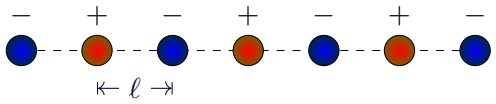
$$W_{\text{op}_i} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{r_{ij}} = q_i\sum_{j=1}^{i-1}V_j(M_i)$$

Le travail total dépensé pour approcher les N particules sera ainsi :

$$W_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N}W_{\text{op}_i} = \sum_{i=1}^{N}\left(q_i\sum_{j=1}^{i-1}V_j(M_i)\right) = \sum_{j<i}q_iV_j(M_i) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}q_iV_j(M_i)$$

Application 5

On considère la file infinie d'ions représentée ci-contre. Chaque anion possède une charge $-q$ et chaque cation une charge $+q$. Tous sont distants de ℓ de leur plus proche voisin.



❶ L'énergie potentielle électrostatique d'un ion dans la chaîne est ainsi :

$$\mathcal{E}_{p_{\text{élec}}} = 2\times\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\times\left(\frac{q}{\ell} + \frac{-q}{2\ell} + \frac{q}{3\ell} + \ldots\right) = \frac{-q^2}{2\pi\varepsilon_0\ell}\times\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right)$$

Comme $\ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, on peut écrire :

$$\mathcal{E}_{p_{\text{élec}}} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0\ell}\times 2\ln(2)$$

❷ L'énergie d'un ion dans le cas d'un enchaînement d'ions chlorure et d'ions sodium est :

$$\mathcal{E}_{p_{\text{élec}}} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0\ell}\times 2\ln(2) \simeq -7,12\text{ eV} \leq 0\text{ (État lié)}$$

2 Mouvement d'un solide indéformable

Les résultats précédents peuvent être étendus eu cas des solides indéformables à condition de définir précisémment la notion de solide indéformable et d'étendre les définitions précédentes au cas d'une distribution continue de masse.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2.1 Définition d'un solide indéformable

Un *solide indéformable* $\mathcal{S}$ est un ensemble continu de points matériels dans un certain volume fini de l'espace tel qu'il existe un référentiel $\mathcal{R}_\mathcal{S}$, appelé *référentiel propre* du solide $\mathcal{S}$, dans lequel tout couple de points $(A,B) \in \mathcal{S}$, l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_\mathcal{S}} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\text{cte}}}$$

Lorsque le solide $\mathcal{S}$ est étudié dans un référentiel $\mathcal{R}$ qui n'est pas son référentiel propre, la *formule de Bour* permet d'évaluer une relation entre $\overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$ et $\overrightarrow{v_{B,\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$ appelée *Formule de Varignon* :

$$\boxed{\overrightarrow{v_{B,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$$

Démonstration

La formule de Bour permet de relier les dérivées vectorielles dans deux basses associées à $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_\mathcal{S}} + \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{R}_\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On obtient donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{AB} \wedge \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{R}_\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

Or $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AO}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{v_{B,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} - \overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$, soit :

$$\overrightarrow{v_{B,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

Remarques :

- La relation de Varignon montre que la vitesse en un point d'un solide indéformable se comporte comme un moment puisque la relation de déplacement est analogue à celle du moment cinétique ou du moment d'une force :

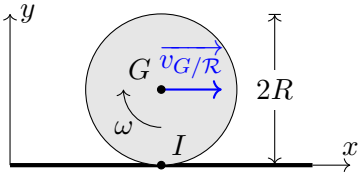
$$\overrightarrow{v_{B,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_B(\mathcal{S}) = \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_A(\mathcal{S}) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{G/\mathcal{R}}} \quad \text{et} \quad \overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_B\left(\overrightarrow{F}\right) = \overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_A\left(\overrightarrow{F}\right) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}$$

- La relation de Varignon permet d'abaisser à 6 le nombre de degrés de liberté d'un solide indéformable : il suffit de connaître les trois composantes du vecteur-vitesse $\overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$ d'un point A du solide ainsi que les trois composantes du vecteur *vitesse angulaire* $\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$ pour connaître le comportement de n'importe quel autre point B du solide.

  NB : La notion de moment cinétique sera étendue au cas des solides un peu plus loins dans ce cours.

- La relation de Varignon permet d'établir la condition de *roulement sans glissement* au niveau d'un point I. On note $\mathcal{R}$ le référentiel d'étude, attaché au sol. On a alors :

$$\overrightarrow{v_{G,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = R\omega\,\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{v_{I,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} + \underbrace{\overrightarrow{GI} \wedge \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}_{R\omega\,\overrightarrow{u_x}} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_{I,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{0}}$$



Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2.2 Translation et rotation

2.2.1 Écriture torsorielle et degrés de liberté

Comme chacun des moments décrit ci-avant est défini pour tout point A du solide, on peut définir un champ de moment. De plus, on remarque que ce moment est *équiprojectif*, c'est-à-dire que pour tout $(A,B) \in \mathcal{S}$, on vérifie la propriété suivante :

$$\overrightarrow{v_{B,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_B(\mathcal{S}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_A(\mathcal{S}) \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_B\left(\overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_A\left(\overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$$

On définit alors un *torseur* comme étant un *champ de moments équiprojectif*. Sa notation habituelle fait apparaître le *moment* en un point A en bas du torseur, muni de sa *résultante* en haut du torseur. On notera alors :

$$\{\mathcal{V}_A(\mathcal{S})\} = \left\{\begin{matrix} \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \end{matrix}\right\} \quad \text{et} \quad \{\sigma_A(\mathcal{S})\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{p_{G/\mathcal{R}}} \\ \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_A(\mathcal{S}) \end{matrix}\right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_A(\mathcal{S})\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{F} \\ \overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_A\left(\overrightarrow{F}\right) \end{matrix}\right\}$$

Torseur cinématique — Torseur cinétique — Torseur des actions mécaniques

Chaque torseur est ainsi caractérisé par 6 degrés de libertés, c'est-à-dire 6 composantes scalaires qu'il est nécessaire de fixer pour connaître l'expression complète du torseur. Le mouvement du solide sera ainsi intégralement décrit par la connaissance :

- du vecteur-vitesse d'un point du solide (translations danns les trois directions de l'espace), si possible son barycentre G qui décrit généralement une trajectoire plus simple que les autres points.
- du vecteur-vitesse angulaire du solide par rapport au référentiel (rotation propre).

2.2.2 Cas d'une rotation autour d'un axe fixe

Pour tout solide $\mathcal{S}$ décrit dans un référentiel $\mathcal{R}$ vérifiant $\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \neq \overset{\hookrightarrow}{0}$, il est possible de choisir un point O situé sur l'axe de rotation du solide tel que :

$$\overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{O,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

Si l'axe de rotation est fixe dans $\mathcal{R}$, alors $\overrightarrow{v_{O,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{0}$ et pour tout point A du solide, on a :

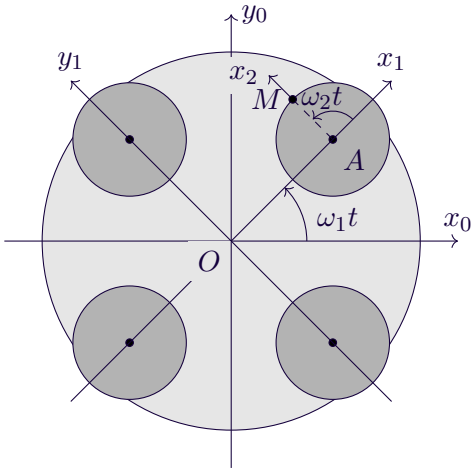
$$\boxed{\overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OA}}$$

☞ La trajectoire de chaque point du solide $\mathcal{S}$ est un cercle.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Application 6

On considère le manège des tasses à café représenté ci-contre. Le plateau central tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse de rotation ω_1. Les tasses tournent par rapport au plateau central avec la vitesse de rotation ω_2. On note $OA = r_1$ et $AB = r_2$.



Chaque solide est associé à son référentiel propre et à une base :

- La base liée au socle du manège, fixe dans le référentiel terrestre est $\mathcal{R}_0$ (base $(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{u_z})$).
- La base liée au plateau central est $\mathcal{R}_1$ (base $(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{u_z})$).
- La base liée à la tasse étudiée est $\mathcal{R}_2$ (base $(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{u_z})$).

1. L'axe de rotation de la tasse est fixe dans les référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Celui du plateau central est fixe dans $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_0$.
   NB : l'axe de rotation d'un solide $\mathcal{S}$ est toujours fixe dans son référentiel propre.
2. On a ainsi $\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{2/1} = \omega_2 \, \vec{u_z}$ et $\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{1/0} = \omega_1 \, \vec{u_z}$.
3. Comme la tasse a un mouvement de rotation pure dans le référentiel $\mathcal{R}_1$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_1}} = \overrightarrow{MA} \wedge \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{2/1} = -r_2 \vec{x_2} \wedge \omega_2 \, \vec{u_z} = -r_2 \omega_2 \vec{y_2}$$

   Avec la même méthode, le plateau central ayant un mouvement de rotation pure dans $\mathcal{R}_0$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{v_{A/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{AO} \wedge \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{1/0} = -r_1 \vec{x_1} \wedge \omega_1 \, \vec{u_z} = r_1 \omega_1 \vec{y_2}$$

4. D'après la formule de Bour :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_2} + \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_2} + \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{OM}$$

   soit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_2} + \underbrace{\left(\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{2/1} + \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{1/0}\right)}_{\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{2/0}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

   On peut ainsi établir la formule de *composition des rotations* :

$$\boxed{\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{2/0} = \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{2/1} + \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{1/0}}$$

5. Par définition, $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OA} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_2} + \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{AM}$

   soit :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_0}} = \omega_1 \, \vec{u_z} \wedge r_1 \vec{x_1} + (\omega_1 + \omega_2) \, \vec{u_z} \wedge r_2 \vec{x_2} = r_1 \omega_1 \vec{y_1} + r_2 (\omega_1 + \omega_2) \vec{y_2}$$

2.2.3 Cas d'une translation

Tout solide décrivant une trajectoire dans $\mathcal{R}$ tout en conservant un taux de rotation nul $\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \overset{\hookrightarrow}{0}$ à tout instant décrit une **translation**.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Comme la relation de Varignon lie les vitesses de deux points A et B du solide $\mathcal{S}$, on en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{v_{A,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{B,\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \quad \forall (A,B) \in \mathcal{S}}$$

Remarques :

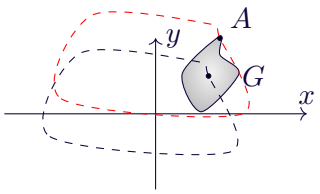
- Tous les points décrivant exactement la même trajectoire, on peut se contenter d'en étudier plus qu'un : le centre de gravité G de $\mathcal{S}$ si c'est faisable.
- Pour un solide $\mathcal{S}$ en translation dans $\mathcal{R}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et non seulement constant dans le référentiel propre $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ du solide, mais aussi dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'étude :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_\mathcal{S}} = \overrightarrow{0}$$

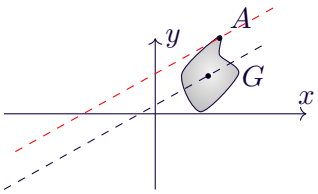
- La nature de la translation dépend de la nature de la trajectoire de G (ou d'un autre points puisque tous ont la même trajectoire dans $\mathcal{R}$) :
  - Une *translation rectiligne*, si la trajectoire de G est une *droite*.
  - Une *translation circulaire*, si la trajectoire de G est un *cercle*.
  - Une *translation curviligne*, si la trajectoire de G est d'une autre nature.

Application 7

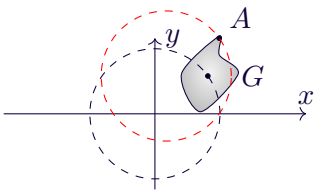
Sur les trois trajectoires de G représentées ci-dessous :



Translation curviligne



Translation rectiligne



Translation circulaire

1. La nature de la trajectoire de G est précisée sur le shéma.
2. La trajectoire du point A est dessinée sur chaque figure.

2.3 Transmission des actions mécaniques

2.3.1 Forces et moments de forces

Les forces $\overrightarrow{F}$ et les moment de force $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\overrightarrow{F}\right)$ en un point O sont les deux types d'actions mécaniques qui peuvent s'appliquer sur un solide indéformable.

Mathématiquement, la différence entre les deux est que :

- La force est un vecteur, le point d'application est fictif : deux force s'additionnent pour donner une résultante par addition vectorielle même si leur point d'application n'est pas le même.

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}}$$

- Le moment est défini en un point O. Sommer deux moments de force s'ils ne sont pas exprimés au même point n'a aucun sens. Il faudra donc **IMPÉRATIVEMENT** veiller à appliquer deux moments au même point O avant d'en faire la somme.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Écrites sous forme de torseur, les actions mécaniques se représentent par un torseur des actions mécaniques :

$$\{\mathcal{T}_A(\mathcal{S})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F} \\ \hookrightarrow \\ \overrightarrow{\mathscr{M}}_A\left(\overrightarrow{F}\right) \end{array} \right\}$$

Deux situations particulières peuvent se présenter pour le solide $\mathcal{S}$:

Le glisseur : le solide n'est localement pas soumis à un moment de force.

$$\{\mathcal{T}_A(\mathcal{S})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F} \\ \hookrightarrow \\ 0 \end{array} \right\}$$

☞ Tous les points soumis à un glisseur sont sur son *axe*.

Le couple : le solide est globalement soumis à des efforts qui se compensent, la résultante est nulle.

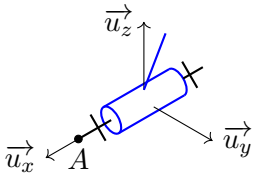
$$\{\mathcal{T}_A(\mathcal{S})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \hookrightarrow \\ \overrightarrow{\mathscr{M}}\left(\overrightarrow{F}\right) \end{array} \right\}$$

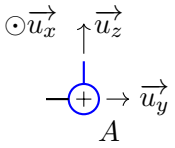
☞ Le champ de moment est donc uniforme, inutile de préciser le point d'application.

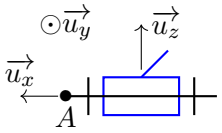
Un couple est donc un *champ constant de moment de forces*.

2.3.2 Liaison pivot

Du point de vue du modèle cinématique, une liaison pivot n'autorise qu'un degré de liberté entre deux pièces constitutives d'un mécanisme, à savoir une seule rotation.







Le torseur cinématique et le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison pivot d'axe $(A,\ \overrightarrow{u_x})$ sont de la forme suivante :

$$\{\mathcal{V}_A(\mathcal{S})\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \{\tau_A(\mathcal{S})\} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & M_y \\ F_z & M_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

☞ On remarque que les efforts axiaux (F_x), et radiaux (F_y et F_z) sont transmis par la liaison. De même, les moments radiaux (M_y et M_z) sont transmis alors que le moment axial M_x n'est **PAS TRANSMIS**, précisémment du fait du degré de liberté permis.

Une liaison pivot est dite *parfaite* si elle est :

- *cinématiquement parfaite* : dans ce cas le seul ddl effectivement autorisé est la rotation suivant $\overrightarrow{u_x}$.
  - — Les solides en contact ont une géométrie parfaite.
  - — Les solides en contact sont indéformables.
  - — Il n'y a pas de jeu dans les liaisons.
- *sans frottements* : dans ce cas le moment M_x est strictement nul.

Si une liaison pivot est parfaite, alors la puissance mécanique absorbée est nulle :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{pivot}} = 0 \text{ W}}$$

2.4 Équations du mouvement d'un solide en référentiel galiléen

2.4.1 Matrice d'inertie - moment d'inertie

L'expression du moment cinétique, telle que développée pour le cas d'un système à N points matériels, peut être étendue au cas des solides indéformables. Pour rappel, le premier théroème de König énonce :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(M) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GM_i} \wedge (m_i \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}})}_{\overset{\hookrightarrow}{L^\star}} + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

Or, on a vu que dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^\star$, le point G est immobile. La relation de Varignon peut être appliquée et s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}^\star}} = \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}^\star}} + \overrightarrow{M_iG} \wedge \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^\star}$$

On obtient ainsi, en opérant un passage à la limite pour exprimer le moment cinétique du solide $\mathcal{S}$:

$$\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}) = \int_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{GM} \wedge (\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^\star} \wedge \overrightarrow{GM}) \mathrm{d}m + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

Application 8

1. Comme ici $O = G$, on doit calculer :

$$\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}) = \int_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{GM} \wedge (\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^\star} \wedge \overrightarrow{GM}) \mathrm{d}m$$

   soit :

$$\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O = \int r\, \overrightarrow{u_r} \wedge (r\dot{\theta})\, \overrightarrow{u_\theta} \mathrm{d}m = \left(\int r^2 \mathrm{d}m \right) \dot{\theta}$$

2. On note ainsi $J = \int r^2 \mathrm{d}m$ le moment d'inertie du solide. Pour une tige homogène, on peut écrire $\mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}r$ avec $\mu = \frac{m}{\ell}$ la masse linéaire de la tige, soit :
   $J = \mu \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} r^2 \mathrm{d}r = \mu \frac{\ell^3}{12} = \frac{m\ell^2}{12}$
3. Si la tige est remplacée par une boule homogène de rayon ℓ, on a :

$$J = \int_0^\ell r^2 \mathrm{d}m \quad \text{avec} \quad m = \frac{4}{3}\pi\mu\ell^3 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}m = 4\pi r^2 \mu \mathrm{d}r$$

   soit :

$$J = 4\pi\mu \int_0^\ell r^4 \mathrm{d}r = \frac{4}{5}\pi\mu\ell^5 = \frac{3}{2}m\ell^2$$

On définit la *matrice d'inertie* $[I_G(\mathcal{S})]$ du solide $\mathcal{S}$ au point G la matrice (de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) vérifiant pour tout vecteur géométrique $\overrightarrow{u}$:

$$[I_G(\mathcal{S})]\, \overrightarrow{u} = \int_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{GM} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{GM}) \mathrm{d}m$$

Son expression détaillée est la suivante :

$$[I_G(\mathcal{S})] = \begin{bmatrix} \int y^2+z^2 \mathrm{d}m & -\int xy\, \mathrm{d}m & -\int xz\, \mathrm{d}m \\ -\int xy\, \mathrm{d}m & \int x^2+z^2 \mathrm{d}m & -\int yz\, \mathrm{d}m \\ -\int xz\, \mathrm{d}m & -\int\, yz \mathrm{d}m & \int x^2+y^2 \mathrm{d}m \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B}$ étant la base dans laquelle est exprimée la matrice d'inertie.

- Les termes de la diagonale sont appelés *moments d'inertie*.
- Les termes en dehors de la diagonale sont appelés *produits d'inertie*.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

La matrice d'inertie permet de caractériser la répartition de la masse dans un solide $\mathcal{S}$, dans une base donnée.

Cette matrice étant symétrique, elle a le bon goût d'être diagonalisable dans une base $(\overrightarrow{u_{x_p}}, \overrightarrow{u_{y_p}}, \overrightarrow{u_{z_p}})$ appelée *base principale d'inertie*. Dans cette base $\mathcal{B}_p$, la matrice d'inertie aura la forme suivante :

$$[I_G(\mathcal{S})] = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_p}$$

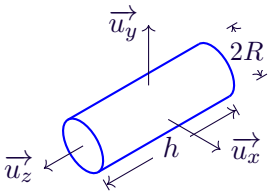
où J_x, J_y et J_z sont appelés les *moments principaux d'inertie* du solide $\mathcal{S}$ au point O.

De sorte que le moment cinétique $\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S})$ du solide $\mathcal{S}$ au point G soit :

$$\boxed{\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}) = [I_G(\mathcal{S})] \cdot \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}}$$

Application 9

1. Dans sa base principale, les produits d'inertie de la matrice d'inertie sont nuls. On peut s'en convaincre en constatant que la distribution des masses est symétriques selon x, y et z, les intégrales des produits d'inertie seront donc des intégrales de fonctions impaires, sur un intervalle centré en 0, donc nulles.
   On aura ainsi, avec $m = \mu\pi R^2 h$:



$$J_z = \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m = \mu \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r^2 (r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z) = \mu \frac{R^4}{4} \times 2\pi \times h = \frac{mR^2}{2}$$

2. On remarque sur la matrice d'inertie que pour un solide de révolution d'axe (Oz) les moments principaux d'inertie J_x et J_y sont identiques.

2.4.2 Théorème de la résultante dynamique

Le *théorème de la résultante dynamique* (ou *loi de la quantité de mouvement* ou *théorème du centre d'inertie*) énonce que, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = m \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_{\text{ext}_i}}}$$

avec :

- m la masse totale du système.
- $\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}$ la vitesse de son barycentre dans $\mathcal{R}$.
- $\overrightarrow{F_{\text{ext}_i}}$ une force extérieure (parmi N) s'appliquant sur $\mathcal{S}$.

2.4.3 Théorème du moment dynamique

Le *théorème du moment dynamique* $\overset{\hookrightarrow}{\delta}_O(\mathcal{S})$ (ou *théorème du moment cinétique*), précise que dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, en un point O :

$$\boxed{\overset{\hookrightarrow}{\delta}_O(\mathcal{S}) = \left.\frac{\mathrm{d}\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{N} \overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}_i}}\right)}$$

avec :

- $\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}) = [I_G(\mathcal{S})] \cdot \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$ le moment cinétique de $\mathcal{S}$ évalué en O.
- $\overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F_{\text{ext}_i}}\right)$ le moment de la force $\overrightarrow{F_{\text{ext}_i}}$ s'appliquant sur $\mathcal{S}$ et évalué en O.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

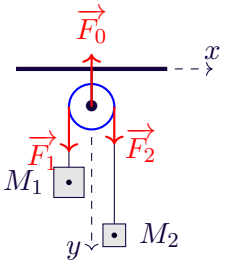
Pour un solide $\mathcal{S}$ dont l'axe de rotation est fixe dans $\mathcal{R}$, soit $\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{0}$, la résultante du torseur des actions mécaniques est nulle (d'après le théorème de la résultante dynamique), le champ de moment est donc constant de sorte que $\mathcal{S}$ soit soumis à un couple $\overset{\hookrightarrow}{C}$.

Le théorème du moment dynamique se simplifie alors :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = [I_G(\mathcal{S})] \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overset{\hookrightarrow}{C}$$

Application 10

La machine d'Atwood est un appareil conçu pour l'étude de la chute libre par George Atwood (physicien anglais du XVIII$^{\text{e}}$ siècle) et longtemps amélioré pour se rapprocher davantage d'une véritable chute. L'intérêt de l'invention est de contourner la brièveté du temps de parcours en diminuant l'accélération des masses et de permettre par là, la mesure du temps écoulé de bien meilleure façon que les plans inclinés déjà essayés par Galilée.



La machine se compose de deux solides M_1 et M_2, de masses respectives m_1 et m_2, reliés par un fil et suspendus de part et d'autre d'une poulie de rayon R et de moment principal d'inertie J_z suivant (Gz). La poulie est fixée à un bâti. Pour simplifier l'étude, le fil et la poulie sont supposés idéaux et transmettent parfaitement les efforts.

❶ On considère la poulie comme une liaison pivot entre une roue et un bâti. On note G son centre de gravité placé sur son axe de rotation. En réalisant un bilan des forces sur la poulie on liste :

- La tension du fil qui retient la masse M_1 : $\overrightarrow{F_1} = +m_1 g\,\overrightarrow{u_y}$, de moment en G $\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{M}}_G\left(\overrightarrow{F_1}\right) = -m_1 gR\,\overrightarrow{u_z}$.
- La tension du fil qui retient la masse M_2 : $\overrightarrow{F_2} = +m_2 g\,\overrightarrow{u_y}$, de moment en G $\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{M}}_G\left(\overrightarrow{F_2}\right) = +m_2 gR\,\overrightarrow{u_z}$.
- La force du bâti qui retient la poulie : $\overrightarrow{F_0} = -F\,\overrightarrow{u_y}$, de moment nul en G (puisqu'il s'agit du point d'application de $\overrightarrow{F_0}$).

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la poulie, dont le barycentre est fixe dans $\mathcal{R}$, s'écrit :

$$m\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F_0} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{0}$$

On en déduit dans la direction $\overrightarrow{u_y}$ que $F = (m_1 + m_2)g$.

Le théorème du moment dynamique appliqué à la poulie s'écrit :

$$\overset{\hookrightarrow}{\delta}_G(\text{poulie}) = \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{M}}_O\left(\overrightarrow{F_0}\right) + \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{M}}_O\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{M}}_O\left(\overrightarrow{F_2}\right) = (m_2 - m_1)gR\,\overrightarrow{u_z}$$

Or, $\overset{\hookrightarrow}{\delta}_G(\text{poulie}) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J_z\omega_z\right)\right|_{\mathcal{R}} = J_z\dot{\omega}_z$

On a donc :

$$\dot{\omega}_z = \frac{(m_2 - m_1)gR}{J_z}$$

L'accélération subie par les deux masselottes est donc $\pm R\dot{\omega}_z$, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{a_1} = -\frac{(m_2 - m_1)gR^2}{J_z}\,\overrightarrow{u_y}} \text{ pour } M_1 \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{a_2} = +\frac{(m_2 - m_1)gR^2}{J_z}\,\overrightarrow{u_y}} \text{ pour } M_2$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2.4.4 Principe fondamental de la dynamique

On peut remarquer que le moment dynamique $\overset{\hookrightarrow}{\delta}_O(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$ en O vérifie la propriété suivante :

$$\overset{\hookrightarrow}{\delta}_O(\mathcal{S}) = \left.\frac{\mathrm{d}\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_G(\mathcal{S}) + \overrightarrow{OG}\wedge(m\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}})\right)\right|_{\mathcal{R}}$$

soit :

$$\overset{\hookrightarrow}{\delta}_O(\mathcal{S}) = \overset{\hookrightarrow}{\delta}_G(\mathcal{S}) + \underbrace{\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}\wedge(m\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}})}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{OG}\wedge(m\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}}})$$

Le moment dynamique d'un solide S est donc un champ de moment défini pour tous les points M du solide $\mathcal{S}$ dont la résultante est $m\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}}}$. On peut donc l'écrire sous forme de torseur : le *torseur dynamique* :

$$\{\mathcal{D}_O(\mathcal{S})\} = \left\{\begin{matrix} m\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}}} \\ \overset{\hookrightarrow}{\delta}_O(\mathcal{S}) \end{matrix}\right\}$$

Le *principe fondamental de la dynamique* revient donc à écrire, pour un solide $\mathcal{S}$ étudié dans un référentiel galiléen :

$$\{\mathcal{D}_O(\mathcal{S})\} = \{\mathcal{T}_O(\mathcal{S})\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{matrix} m\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}}} \\ \overset{\hookrightarrow}{\delta}_O(\mathcal{S}) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{F} \\ \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{M}}_O\left(\overrightarrow{F}\right) \end{matrix}\right\}}$$

2.5 Théorèmes énergétiques

2.5.1 Puissances intérieures et extérieures au système

La *puissance mécanique* $\mathcal{P}$ n'a été définie, dans les chapitres précédents, que pour une force $\overrightarrow{F}$ s'appliquant sur un système ponctuel M de vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ dans $\mathcal{R}$.

Elle doit être ici étendue aux autres actions mécaniques : les moments.

La *puissance* $\mathcal{P}$ d'une action mécanique est définie comme le commoment du torseur cinématique de $\mathcal{S}$ avec le torseur des actions extérieures, soit :

$$\boxed{\mathcal{P} = \{\mathcal{V}_M(\mathcal{S})\}\cdot\{\mathcal{T}_M(\mathcal{S})\} = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overset{\hookrightarrow}{\mathcal{M}}_M\left(\overrightarrow{F}\right)\cdot\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$$

☞ La commoment est un opérateur qui permet de rendre $\mathcal{P}$ invariant au point M considéré.

La puissance d'une action mécanique sera qualifiée :

- d'*intérieure* si l'action mécanique considérée est produite par le système sur le système.
  e.g. Une ation mécanique de contact entre deux pièces du système.
- d'*extérieure* si l'action mécanique est produite par un élément extérieur au système et s'applique sur un élément du système.
  e.g. La pesanteur agissant sur chaque pièce matérielle sur Terre.

2.5.2 Expression de l'énergie cinétique d'un solide

L'*énergie cinétique* d'un solide S est définie par :

$$\boxed{\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\{\mathcal{V}_M(\mathcal{S})\}\cdot\{\mathcal{C}_M(\mathcal{S})\} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}\cdot(m\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}) + \frac{1}{2}\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\cdot\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_M(\mathcal{S})}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

avec M un point quelconque du système. On peut donc choisir $M = G$ de sorte que :

$$\boxed{\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}^2 + \frac{1}{2}\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \cdot [I_G(\mathcal{S})] \cdot \overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$$

Si le solide S effectue une rotation de vecteur-vitesse angulaire $\overset{\hookrightarrow}{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \Omega_x\overrightarrow{u_{x_p}} + \Omega_y\overrightarrow{u_{y_p}} + \Omega_z\overrightarrow{u_{z_p}}$ dans la base propre du solide $\mathcal{S}$, alors on peut écrire :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + \frac{1}{2}\left(J_x\Omega_x^2 + J_y\Omega_y^2 + J_z\Omega_z^2\right)}$$

2.5.3 Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique précise que pour un solide $\mathcal{S}$ soumis à des actions mécaniques extérieures et intérieures :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}}$$

Pour un solide en rotation pure ($\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{0}$, donc la résultante des actions mécanique extérieure est nulle) autour d'un axe fixe dans $\mathcal{R}$, on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\left(J_x\Omega_x^2 + J_y\Omega_y^2 + J_z\Omega_z^2\right)\right) = M_x\Omega_x + M_y\Omega_y + M_z\Omega_z$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/