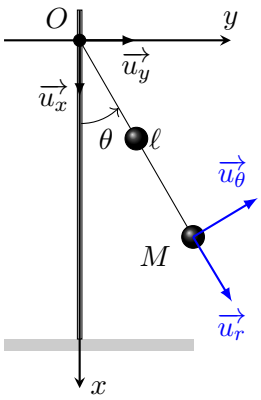
# Mécanique

## (Mécanique des solides indéformables)

## Pour réviser le cours

### EXERCICE 1 Le pendule lesté (⋆)

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur $\ell$ sur laquelle sont fixées deux masses $m$ identiques à distance $\ell/2$ et $\ell$ du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige.




1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5\ell}\sin(\theta) = 0$$

2. Montrer que le centre de masse $G$ du système se trouve à distance $\frac{3\ell}{4}$ de l'axe.

3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique (ou la loi de la quantité de mouvement) à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse $G$ ?

### EXERCICE 2 Cylindre dans une goutière (⋆⋆)

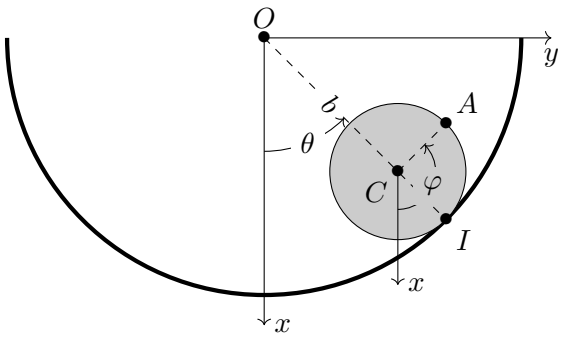
Un disque $D$ de masse $m$, de rayon $a$ et de centre $C$, peut rouler, dans un plan vertical $Oxy$, à l'intérieur d'une gouttière de centre $O$ et fixe dans le référentiel terrestre $R$.

$D$ est homogène de moment d'inertie $J = \frac{ma^2}{2}$ par rapport à son axe $Cz$.

Le cœfficient de frottement de glissement entre la gouttière et le disque est $f$. $Ox$ est l'axe vertical, le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est uniforme.

On appelle $\theta$, l'angle entre $\overrightarrow{u_x}$ et $Oc$, et $\varphi$ celui entre $\overrightarrow{u_x}$ et la direction $CA$ où $A$ est un point périphérique de $D$.

On suppose que $D$ peut rouler dans glisser dans la gouttière. En outre, l'angle $\theta$ reste faible.

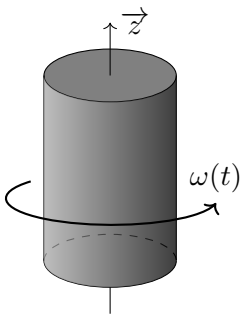



1. Déterminer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\theta)$ de $D$ en imposant $\mathcal{E}_p(0) = 0$. En donner une expression approchée au deuxième ordre en $\theta$.
2. Établir la relation liant $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$.
3. L'énergie mécanique du disque est-elle conservée ? Pourquoi ?
4. Déterminer l'équation du mouvement vérifiée par $\theta(t)$. La résoudre avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
5. Pour la solution précédente calculer les valeurs moyennes de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. Que constate-t-on ?
6. Application numérique : $\theta_0 \simeq 0,1$ rad ; $m \simeq 160$ g ; $g \simeq 10$ m · s$^{-2}$, $b \simeq 20,0$ cm. Calculer l'énergie cinétique moyenne de $D$.

## L'essentiel

### EXERCICE 3 Volant d'inertie (⋆⋆)

On s'intéresse dans cet exercice à la régulation de la vitesse de rotation d'une machine tournante par un volant d'inertie, qui est un anneau lié au rotor de masse élevée et d'assez grand rayon. La machine tournante en question peut aussi bien être un moulin à blé qu'un broyeur de cailloux, mais les volants d'inertie sont également utilisés en Formule 1 dans le KERS « Kinetic Energy Recovering System ».




On modélise ici la machine tournante par un rotor de moment d'inertie $J$, soumis à un couple moteur $\Gamma_0$ constant et à un couple de frottement de type fluide $\Gamma_f = -\alpha\omega$. où $\alpha$ est une constante et $\omega$ la vitesse angulaire du rotor.

1. Justifier par un argument énergétique que $\alpha > 0$.
2. Le rotor est initialement immobile. Donner l'évolution de sa vitesse angulaire $\omega(t)$, en introduisant la vitesse finale $\omega_f$ et un temps caractéristique $\tau$.

3. Des vibrations du dispositif se traduisent par un nouveau couple exercé sur le rotor, que l'on prendra harmonique $\Gamma_{vib}(t) = \gamma\cos(\Omega t)$. Pourquoi ne perd-on pas en généralité en considérant ce couple harmonique ? Après un régime transitoire, la vitesse angulaire du rotor est elle aussi harmonique de pulsation $\Omega$. Donner le temps caractéristique de la durée du transitoire.
4. Après la fin du transitoire, on cherche la vitesse angulaire de rotation $\omega(t)$ sous la forme

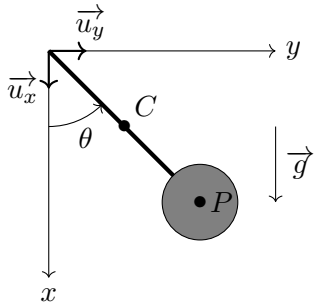
$$\omega(t) = \omega_f + A\cos(\omega t + \varphi)$$

Déterminer l'amplitude $A$. L'équation différentielle étant linéaire, on pourra utiliser le théorème de superposition et traiter la partie harmonique avec la notation complexe.
5. En déduire l'intérêt et l'inconvénient d'un volant d'inertie.

## EXERCICE 4 Rotation d'un pendule composé (⋆⋆)

On considère un pendule composé constitué de :

- un disque homogène $A$, de masse $m$, de rayon $R$, de centre $P$,
- une tige $OP$ homogène de masse $m'$, de longueur $L$, de milieu $C$.




Le disque et la tige sont rigidement liés l'un à l'autre et contenus dans le plan $(Oxy)$. L'ensemble constitué par le disque $A$ et la tige $OP$ peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical $(Oxy)$, autour de l'axe horizontal $(Oz)$. La position du pendule précédent est repérée par l'angle $\theta$ que fait la tige avec la verticale.
L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Le moment d'inertie $I_1$ de la tige par rapport à l'axe horizontal $(Oz)$ est égal à $I_1 = \dfrac{m'L^2}{3}$.
Le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe horizontal $(Oz)$ est égal à $J_1 = \dfrac{mR^2}{2} + mL^2$.

1. Déterminer l'expression du moment d'inertie $J$ du système {disque $A$ + tige $OP$} par rapport à l'axe horizontal $(Oz)$. On exprimera $J$ en fonction de $m$, $m'$, $R$ et $L$.

Dans toute la suite, on pourra garder $J$ dans les formules littérales sans le remplacer par l'expression trouvée dans cette question.

### PARTIE A : Mouvement sans frottement :

Dans un premier temps, la liaison pivot est supposée idéale.

2. Rappeler ce qu'est une liaison pivot.
3. Faire le bilan des actions appliquées au système {disque $A$ + tige $OP$}. On précisera les points d'application des différentes forces (astuce : décomposer le poids du pendule composé en deux, à savoir le poids du disque et le poids de la tige).
4. En appliquant le théorème du moment cinétique au système {disque $A$ + tige $OP$}, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta$ au cours du temps.
5. À l'instant $t = 0$, le système {disque $A$+tige $OP$} est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle $\theta_1$. On se place dans le cas où l'angle $\theta_1$ est petit. Montrer que le système constitue alors un oscillateur harmonique. En déduire la période $T_1$ des petites oscillations du système {disque $A$+tige $OP$} autour de sa position d'équilibre stable ($\theta = 0$).

### PARTIE B : Amortissement fluide :

Nous nous plaçons dans le cas où l'action de l'axe sur la tige due aux frottements peut être modélisée par un couple $C = -h\dot{\theta}$.

6. Rappeler la définition d'un couple.
7. Par une approche énergétique, établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle $\theta$.
8. Les frottements sont supposés suffisamment faibles pour que le régime d'oscillations de l'objet $A$ soit pseudo-périodique. Déterminer alors, dans le cas des petites oscillations, la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle avec les mêmes conditions initiales que précédemment.
9. Donner, dans ce cas, l'allure de la représentation graphique de $\theta(t)$ en fonction du temps.

## EXERCICE 5 Masse et poulie (⋆⋆)

Une masse $M$ (assimilable à un point matériel $A$) est suspendue à un fil passant par une poulie de masse $m$, de rayon $R$.

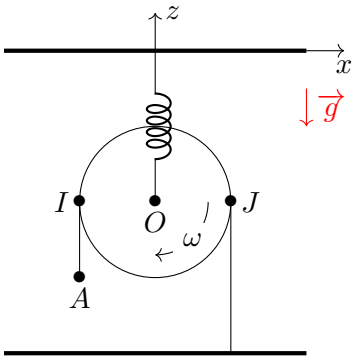
On note $J_{O_y} = \frac{mR^2}{2}$, le moment d'inertie de la poulie par rapport à l'axe $Oy$ passant par $O$ et perpendiculaire au plan de la poulie.

On admettra que le fil ne glisse pas sur la poulie. La poulie est suspendue par son centre à un ressort de

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

constante de raideur $k$, et de longueur à vide $\ell_0$.

On néglige les frottements. On appelle $z$ et $Z$, respectivement, les écarts de la masse $M$ et de la poulie par rapport à leur position d'équilibre.




1. Donner l'énergie mécanique du système en fonction de $z$ et de $\dot{z}$ (on n'explicitera pas $\ell_{\text{éq}}$, longueur à l'équilibre du ressort).
2. Donner la période des petites oscillations de la masse autour de sa position d'équilibre.

## Pour aller plus loin

### EXERCICE 6 Le pendule pesant (⋆⋆)

On considère le pendule pesant représenté en *Figure 1*. Une tige métallique homogène, de masse $m_t$ est liée au bâti aux deux tiers de la longueur. Son moment d'inertie en $O$ est $J_t = \frac{m_t L^2}{9}$.

Quatre masselottes, chacune de masse $m$, peuvent être disposées en contrepoids, au niveau du point $B$, pour équilibrer le pendule. Les deux masselotes restantes, peuvent être installées au niveau du point $A$ à une distance $\ell$ de l'axe de rotation du pendule.

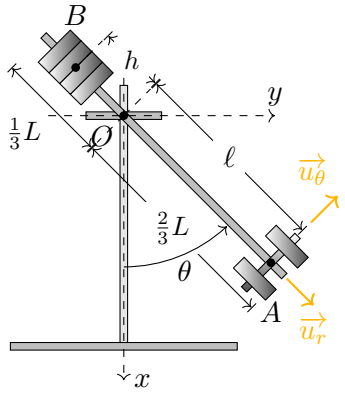



Figure 1 – Pendule pesant

### PARTIE A : Équilibrage du pendule :

1. Préciser où se situe le barycentre $\overrightarrow{OG_t}$ de la tige seule.

L'opération d'équilibrage consiste à visser les quatre masselottes (chacune de masse $m$) au niveau du point $B$ de manière à ramener le barycentre du système {tige + quatre masselottes} au niveau du point $O$. On assimile ainsi les quatres masselottes à une masse ponctuelle en $B$.

2. Préciser la condition sur $h$ nécessaire à l'équilibrage du pendule.
3. Préciser l'expression du moment d'inertie $J_0$ du pendule équilibré en fonction de $m$, $m_t$ et $L$.

### PARTIE B : Étude des oscillations :

Les deux masselottes restantes sont placées sur un chevalet et fixées à la tige du pendule au niveau du point $A$.

4. Préciser l'expression du moment d'inertie $J$ du pendule ainsi formé en fonction de $J_0$, $m$ et $\ell$.
5. Préciser l'équation différentielle sur $\theta$ vérifiée par le pendule.
   - **a.** À partir du théorème du moment dynamique.
   - **b.** À partir du théorème de la puissance cinétique.
6. Résoudre cette équation aux « petits angles » pour un lâché, sans vitesse initiale, depuis un angle $\theta_0$.

### EXERCICE 7 Satellite tournant (⋆⋆⋆)

On s'intéresse à la mise en rotation rapide d'un satellite dans l'espace. Cet objet volant est constitué de deux parties : un corps central entouré de deux masselottes, le tout représenté en *Figure 2*. Le corps central est assimilable à une tige de longueur $\ell$, de masse $M$ et d'épaisseur négligeable. Les deux masselottes (considérées comme ponctuelles) sont chacune de masse $m$, et sont maintenues à une distance $\rho$ par deux supports de masse négligeable, fixés rigidement à mi-hauteur du corps central.

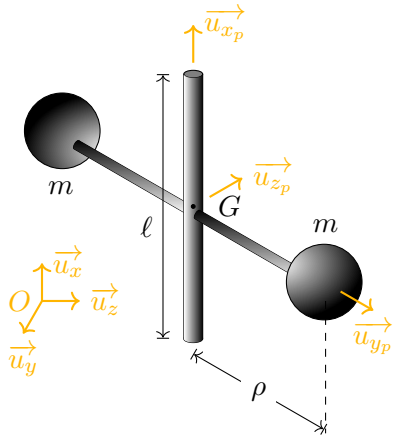



Figure 2 – Satellite

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

On note $G$ le centre de masse de ce système, et $(x_p, y_p, z_p)$ le repère lié au solide. $x_p$ est l'axe de symétrie du corps central, $y_p$ l'axe des masselottes et $z_p$ l'axe orthogonal au plan $(x_p, y_p)$. On note :

$$[I_G(\mathcal{S})] = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}$$

la matrice d'inertie du satellite dans sa base principale d'inertie $(\overrightarrow{u_{x_p}}, \overrightarrow{u_{y_p}}, \overrightarrow{u_{z_p}})$.

1. Établir les équations d'Euler du mouvement en l'absence d'actions mécaniques extérieures d'exerçant sur le système :

$$\begin{cases} J_x\dot{\Omega}_x - (J_y - J_z)\Omega_y\Omega_z &= 0 \\ J_y\dot{\Omega}_y - (J_z - J_x)\Omega_x\Omega_z &= 0 \\ J_z\dot{\Omega}_z - (J_x - J_y)\Omega_x\Omega_y &= 0 \end{cases}$$

où le vecteur instantané de rotation $\overset{\hookrightarrow}{\Omega} = \Omega_x\overrightarrow{u_{x_p}} + \Omega_y\overrightarrow{u_{y_p}} + \Omega_z\overrightarrow{u_{z_p}}$ est exprimé dans la base propre d'inertie liée au satellite $\mathcal{S}$.

2. Exprimer $J_x$, $J_y$ et $J_z$ de la matrice d'inertie $[I_G(\mathcal{S})]$ du satellite par rapport à $G$ dans le repère $(x_p, y_p, z_p)$ en fonction de $m$, $M$, $\ell$ et $\rho$. Montrer que l'écartement $\rho$ des masselottes permet de distinguer deux configurations selon l'ordre des moments d'inertie principaux :

$$\begin{array}{rcl} A & : & J_x < J_y < J_z \text{ pour } \rho < \rho_c \\ B & : & J_y < J_x < J_z \text{ pour } \rho > \rho_c \end{array}$$

où $\rho_c$ est un écartement seuil que l'on déterminera en fonction de $\ell$, $m$ et $M$. Dans la suite, on exprimera les moments d'inertie en fonction de $m$, $\rho$ et $\rho_c$.

3. On s'intéresse à la stabilité de la rotation autour de l'axe $(G, x_p)$, dans chacune des configurations $A$ et $B$. Pour cela on considère le vecteur instantané de rotation sous la forme :

$$\overset{\hookrightarrow}{\Omega} = \Omega_0\overrightarrow{u_{x_p}} + \overset{\hookrightarrow}{\omega}(t)$$

telle que la perturbation $\overset{\hookrightarrow}{\omega}(t) = \omega_x(t)\overrightarrow{u_{x_p}} + \omega_y(t)\overrightarrow{u_{y_p}} + \omega_z(t)\overrightarrow{u_{z_p}}$ soit d'amplitude très petite devant la constante $\Omega_0$.

**a.** Montrer que, au premier ordre en $\omega$, les équations d'Euler conduisent à $\omega_x = \text{cte}$, et que les composantes selon $y$ et $z$ de la perturbation satisfont les équations différentielles :

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_y + K\omega_y &= 0 \\ \ddot{\omega}_z + K\omega_z &= 0 \end{cases}$$

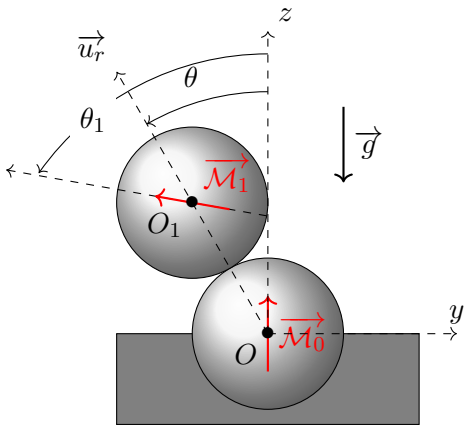
où $K$ est une constante que l'on exprimera en fonction de $\Omega_0$, $\rho$ et $\rho_c$.

**b.** Intégrer ces équations différentielles en distinguant les configurations $A$ et $B$, et décrire la trajectoire du vecteur instantané de rotation dans le repère du solide. Préciser la vitesse angulaire de précession $\Omega_p$ dans le cas de la trajectoire stable.

**c.** Que pensez-vous de la stabilité de la rotation si l'objet présentait 4 masselottes plutôt que 2, disposées symétriquement selon $y$ et $z$ ?

## EXERCICE 8 Billes de néodyme (⋆⋆⋆)

On considère deux billes de néodyme formant des aimants permanents de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}_0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$. Leur interaction magnétique tend à les aligner par un roulement sans glissement sur leur surface de contact. L'angle $\theta$ suffit alors à caractériser la situation de la bille.




1. Relier $\theta_1$ et $\theta$.
2. Justifier que l'énergie mécanique des deux billes, en interaction gravitationnelle avec la Terre, se conserve.

Le champ magnétique $\overset{\hookrightarrow}{B}(M)$ créé localement en un point $M$ autour d'un moment magnétique $\mathcal{M}$ situé en $O$ est :

$$\overset{\hookrightarrow}{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\overrightarrow{\mathcal{M}}\cdot\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM}}{OM^5} - \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}}}{OM^3}\right)$$

3. Exprimer, en fonction de $\mathcal{M} = \left\|\overrightarrow{\mathcal{M}_1}\right\|$ et de l'angle $\theta$, le moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$, dans la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_x})$.
4. Exprimer l'énergie potentielle magnétique $\mathcal{E}_B$ de couplage entre les dipôles $\overrightarrow{\mathcal{M}_0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$. Nous l'écrirons sous la forme suivante :

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2}K(\sin\theta)^2$$

avec $K \geq 0$ une constante à exprimer en fonction de $\mu_0$, $D$ et de $\mathcal{M}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Lors du roulement de la bille mobile sur la bille fixe, le centre de masse $O_1$ de la bille (1) décrit un arc de cercle de rayon $D$ et d'angle au centre égal à $\theta$. Ce mouvement s'accompagne, parallèlement, de la rotation de l'angle $\theta_1$ de la bille (1), déterminé en réponse à la question 1.

5. Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c_1}$ de la bille (1) sous la forme :

$$\mathcal{E}_{c_1} = \frac{1}{2} J' \dot{\theta}^2$$

En détaillant l'expression $J'$ en fonction de la masse $m$ et du diamètre $D$. Le moment d'inertie au centre d'une sphère homogène de masse $m$ et de diamètre $D$ est $J = \frac{mD^2}{10}$.

6. Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle $\mathcal{E}_{g_1}$ (nulle en position verticale) de la bille (1) en fonction de $m$, $g$, $D$ et $\theta$.

7. Représenter l'allure de $\mathcal{E}_B(\theta)$ et $\mathcal{E}_{g_1}(\theta)$ pour $\theta \in [-\pi, +\pi]$. Analyser ces résultats.

8. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta$. On conservera les paramètres $K$, $m$, $g$, $D$ et $J'$.

9. Déterminer à quelle condition la configuration correspondant à $\theta = 0$ est stable (ou métastable, c'est-à-dire sur un certain intervalle autour de $\theta = 0$). On fera porter cette condition sur le paramètre $S$ défini par le rapport suivant :

$$S = \frac{K}{mgD}$$

On proposera une interprétation physique de ce rapport.

10. Exprimer la pulsation $\omega_1$ des oscillations de la bille (1) autour de la configuration verticale en fonction de $S$, $g$ et $D$, dans l'approximation linéaire.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

## EXERCICE 1 Le pendule lesté (⋆)

1. La tige a un mouvement de rotation autour de l'axe $z$. Comme il s'agit d'un solide, l'équation du mouvement s'obtient par le théorème du moment cinétique scalaire autour de l'axe $Oz$.
   - Système : tige, modélisée par un solide formé de deux points matériels de masse m liés rigidement.
   - Référentiel $\mathcal{R}$ : terrestre, qui est galiléen en bonne approximation pour un tel mouvement.

   Bilan des actions mécaniques :
   - Le contact entre la tige et le bâti est modélisé par une liaison pivot, qu'on suppose implicitement parfaite donc de moment :
   $$\mathscr{M}_z\,(\text{liaison}) = 0$$
   - Le poids $\overrightarrow{P}_1$ du point matériel $M_1$, située à distance $\frac{\ell}{2}$ de l'axe, a pour moment par rapport à l'axe (on utilise le repère polaire habituel) :
   $$\mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P}_1\right) = \left(\overrightarrow{OM}_1 \wedge (m\overrightarrow{g})\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = -\frac{1}{2}mg\ell\sin(\theta)$$
   - Le poids $\overrightarrow{P}_2$ de la deuxième masse a pour les mêmes raisons un moment
   $$\mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P}_2\right) = \left(\overrightarrow{OM}_2 \wedge (m\overrightarrow{g})\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = -mg\ell\sin(\theta)$$

   Comme le moment cinétique est additif, le moment cinétique du système est la somme des moments cinétiques de chacune des deux masses (le moment cinétique de la tige est nul car son moment d'inertie est négligeable). Le moment cinétique du point matériel $M_1$ vaut $\mathcal{L}_{(z)}(M_1) = m\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}$.
   ☞ Ce résultat se retrouve directement à partir du moment d'inertie d'un point matériel situé à distance $R$ de l'axe de rotation $z$, $J_z = mR^2$ ... mais aucune expression de moment d'inertie n'est a priori à connaître.

   De même, on trouve pour $M_2$ : $\mathcal{L}_{(z)}(M_2) = m\ell^2\dot{\theta}$. On a donc au total $\mathcal{L}_{(z)}() = \frac{5}{4}m\ell^2\dot{\theta}$.
   Finalement, d'après la loi du moment cinétique (on note $S = \{M_1 + M_2\}$),
   $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{(z)}(S)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P_1}\right) + \mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P_2}\right) \Rightarrow \frac{5}{4}m\ell^2\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}mg\ell\sin(\theta)$$
   D'où :
   $$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{6g}{5\ell}\sin(\theta) = 0}$$

2. Par application de la définition,
   $$2m\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OM_1} + m\overrightarrow{OM_2} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3\ell}{4}\,\overrightarrow{u_r}}$$

3. Appliquons le théorème du moment cinétique à ce nouveau système, un point matériel $G$ de masse $2m$ situé à distance $\frac{3\ell}{4}$ de l'axe. La seule action mécanique qu'il subit est son poids, de moment
   $$\mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P}\right) = -2m \times g \times \frac{3\ell}{4}\sin(\theta)$$
   et son moment cinétique par rapport à l'axe z vaut
   $$\mathcal{L}_{(z)}(G) = 2m \times \frac{2\ell^2}{16}\dot{\theta}$$
   D'après le théorème du moment cinétique,

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\frac{9m\ell^2}{8}\ddot{\theta} = -\frac{3mg\ell}{2}\sin(\theta) \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{4g}{3\ell}\sin(\theta) = 0}$$

On n'aboutit pas à la même équation du mouvement, ce qui signifie que **les deux systèmes ne sont pas équivalents**.

☞ La conclusion à retenir que la dynamique d'un solide en rotation n'est pas donnée par celle d'un matériel situé en son centre d'inertie, ce qui est une différence importante avec un solide translation, pour lequel on aurait obtenu la même équation avec les deux modèles.

## EXERCICE 2 Cylindre dans une goutière (⋆⋆)

1. Le système est le cylindre soumis à son poids (force conservative) et à la réaction du support (ne travaillant pas en l'absence de glissement).

   Le travail du poids est $\overrightarrow{P} = mg\,\overrightarrow{u_x} \cdot (b\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) = -mgb\sin(\theta) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p$. On peut donc écrire :

   $$\mathcal{E}_p(\theta) = -mgb\cos(\theta) + \text{cte} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_p(0) = -mgb + \text{cte} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{cte} = mgb}$$

   On obtient :

   $$\boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = mgb\,(1 - \cos(\theta)) = \frac{1}{2}mgb\theta^2 + \circ(\theta^2)}$$

2. La condition de roulement sans glissement au niveau du point $I$ impose :

   $$\overrightarrow{v}_{I,\text{cylindre}/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}_{C,\text{cylindre}/\mathcal{R}} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{\text{cylindre}/\mathcal{R}} = b\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + (-a\,\overrightarrow{u_r}) \wedge \dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_z}$$

   On obtient ainsi :

   $$\boxed{b\dot{\theta} = -a\dot{\varphi}}$$

3. Le système est soumis à une force de frottement de glissement mais il n'y a pas de glissement, cette force ne travaille donc pas. In fine, le système est soumis **uniquement à des forces conservatives** (poids du cylindre) ou **qui ne travaillent pas** (réaction du support), l'énergie mécanique du système est donc **conservée** d'après le théorème de l'énergie mécanique.
4. L'énergie cinétique du cylindre en rotation dans $\mathcal{R}$ est :

   $$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(b\dot{\theta})^2$$

   On peut donc écrire, d'après le théorème de l'énergie mécanique :

   $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{b^2}{2a^2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}mgb\theta^2\right) = 0$$

   soit ($\dot{\theta} \neq 0$) :

   $$\frac{b^2}{a^2}J\ddot{\theta} + mb^2\ddot{\theta} + mgb\theta = 0$$

   d'où ($J = \frac{ma^2}{2}$) :

   $$\frac{3}{2}mb^2\ddot{\theta} + mgb\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2g}{3b}\theta = 0}$$

   $\theta(t)$ vérifie donc une équation différentielle de pendule linéarisée en oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3b}}$. La forme des solution est donc :

   $$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

5. Les énergies cinétique et potentielle ont pour expressions :
   - $\mathcal{E}_c = \frac{3}{4}mb^2\theta_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \Rightarrow \langle\mathcal{E}_c\rangle = \frac{3}{8}mb^2\omega_0^2\theta_0^2 = \frac{1}{4}mgb\theta_0^2$.
   - $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mgb\theta_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \Rightarrow \langle\mathcal{E}_p\rangle = \frac{1}{4}mbg\theta_0^2$

   On remarque que $\boxed{\langle\mathcal{E}_p\rangle = \langle\mathcal{E}_c\rangle}$ (résultat du théorème du viriel).
6. L'application numérique conduit à :

$$\boxed{\langle\mathcal{E}_c\rangle = 0,8 \text{ mJ}}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/