Mécanique

(Dynamique newtonienne)

EXERCICE 10 Fusée (⋆⋆)

1. Débit massique D_m et variation de masse de la fusée sont reliés par un bilan de masse :

$$m(t) = m(t+\mathrm{d}t) + D_m \mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{D_m(t) = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)} \quad \text{ou} \quad \boxed{m(t+\mathrm{d}t) = m(t) + \mathrm{d}m} \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}m < 0$$

2. Le système { fusée + gaz expulsés} est un système fermé. D'après la première loi de Newton, sa quantité de mouvement se conserve :

$$\overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{p}(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}m(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}(t))$$

soit :

$$m(t)\overrightarrow{v}(t) = m(t+\mathrm{d}t)\overrightarrow{v}(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}m(\overrightarrow{v}(t) + \overrightarrow{u}) = m(t)\overrightarrow{v}(t+\mathrm{d}t) + \mathrm{d}m\overrightarrow{v}(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}m\overrightarrow{u} - \mathrm{d}m\overrightarrow{v}(t)$$

que l'on peut réécrire de la manière suivante :

$$m(t)\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}(t) = -D_m(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}(t+\mathrm{d}t) + \overrightarrow{v}(t)) \simeq D_m\overrightarrow{u}$$

avec $-\overrightarrow{v}(t+\mathrm{d}t) + \overrightarrow{v}(t) \simeq -\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}(t)\mathrm{d}t$ négligé devant $\overrightarrow{u}$ puisqu'infinitésimal d'ordre un.

On obtient ainsi :

$$m(t)\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}(t) = -D_m\overrightarrow{u}$$

avec $\boxed{\overrightarrow{F_p} = -D_m\overrightarrow{u}}$ la force de poussée.

3. En intégrant l'équation de la dynamique, on obtient :

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = +\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u} \Rightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}m}{m}\overrightarrow{u}$$

soit :

$$\int_{\overrightarrow{v_0}}^{\overrightarrow{v}} \mathrm{d}\overrightarrow{v} = \left(\int_{m_0}^{m(t)} \mathrm{d}\ln(m)\right)\overrightarrow{u}$$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{u}\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)}$$

4. Une fois le premier étage vidé d'ergols, la vitesse de la fusée est $v' \simeq 5486$ m · s^{-1}, une fois le deuxième étage vidé, la vitesse de la fusée est $v_1 \simeq 12\,653$ m · s^{-1}.

NB : algébriquement, il faut prendre $u \simeq -4000$ m · s^{-1} pour avoir un résultat positif.

5. En prenant une fusée à un étage, on obtient une vitesse finale de $v_1 \simeq 9035$ m · s^{-1} (la masse finale de la fusée étant 14 t), soit 29% de moins qu'avec une fusée à deux étages.