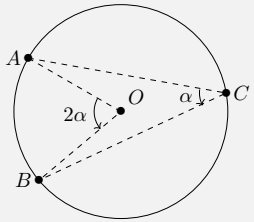
Ondes et signaux

(Interférences lumineuses)

Outils mathématiques : Angle au sommet/au centre

Dans un cercle de centre O, on considère trois points A, B et C formant un triangle inscrit dans le cercle. L'angle $A\hat{O}B$ est appelé *angle au centre* et $A\hat{C}B$ *angle au sommet*, vérifiant :

$$\boxed{A\hat{O}B = 2A\hat{C}B}$$



Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Champ d'interférences (⋆)

On considère le système représenté en *Figure 1*, correspondant à une cuve à ondes dans laquelle les sources S_1 et S_2 correspondent à deux flotteurs synchrones qui émettent des ondes harmoniques de pulsation ω et de célérité c.

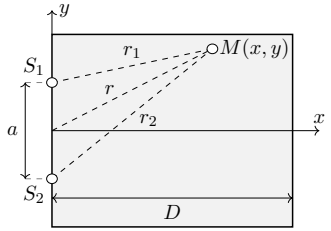
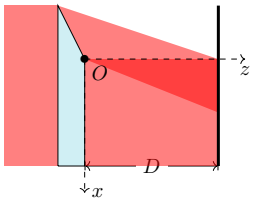


Figure 1 – Cuve à ondes

1. Proposer une expression mathématique aux signaux $s_1\left(\frac{a}{2}, t\right)$ et $s_2\left(-\frac{a}{2}, t\right)$ délivrés par les flotteurs S_1 et S_2. Quelle est la grandeur physique mesurée qui peut correspondre à chacun de ces deux signaux ?
2. On observe les interférences de ces deux ondes en $M(x, y)$.
   - **a.** Calculer la différence de marche $\delta = r_2 - r_1$ si $x \gg y$.
   - **b.** En déduire l'expression de l'amplitude $A(x, y)$ observée en $M(x, y)$.
   - **c.** Tracer la fonction $A(y)$.
   - **d.** Pour $x = D$, montrer que l'interfrange a pour expression $i = \frac{\lambda D}{a}$
3. On considère maintenant que S_1 et S_2 sont deux ouvertures de largeur $b \ll a$ se comportant comme deux sources secondaires diffractant l'onde arrivant des $x \leq 0$.
   - **a.** À quelle condition sur b et la longueur d'onde λ des ondes doit-on tenir compte du phénomène de diffraction ?
   - **b.** Estimer la largeur du champ d'interférence à une distance D pour un angle de diffraction θ petit.

EXERCICE 2 Lame prismatique (⋆⋆)

Un faisceau monochromatique de longueur d'onde $\lambda \simeq 0,600$ μm provenant de l'infini éclaire une lame mince de verre d'indice $n \simeq 1,50$, formée d'une lame prismatique de hauteur $h \simeq 12$ mm et de petit angle $\theta \simeq 30'$, accolée par sa base à une lame à faces parallèles de même hauteur h et d'épaisseur égale à la base du prisme. On observe les franges d'interférences sur un écran normal à l'axe Oz, et donc parallèle à la lame, à la distance D de celle-ci.



1. Expliquer qualitativement, pourquoi il y a des interférences. Où peut-on les observer ?
2. Déterminer la loi $I(x)$ donnant l'intensité lumineuse en un point $M(x, y)$ de l'écran, dans le champ d'interférences.

3. En déduire la forme des franges et l'expression de l'interfrange i.
4. Déterminer la valeur D_1 de D permettant l'observation du plus grand nombre de franges.
5. Quelle est la nouvelle valeur de l'interfrange obtenue en immergeant l'ensemble du dispositif dans de l'eau d'indice $n_{eau} \simeq 1,33$?

L'essentiel

EXERCICE 3 Le dispositif des trous d'Young (⋆)

On considère le dispositif expérimental des trous de Young représenté sur le schéma de la *Figure 2*. Deux trous dans la paroi sont distants de a entre eux et éloignés de D de l'écran où sont observées les interférences.

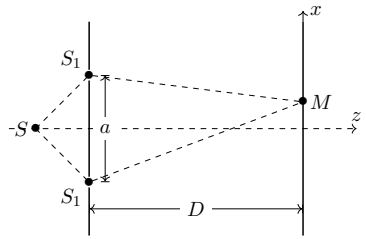


Figure 2 – Dispositif des trous d'Young

1. Dans le cas où les trous ne sont pas identiques, l'intensité lumineuse issue de chaque trou I_1 et I_2 est différente.
   - **a.** Calculer la différence de marche δ, le déphasage $\Delta\varphi$ et l'intensité I sur l'écran, provoqués par les interférences et en dessiner la fonction correspondante.
   - **b.** Calculer le contraste C en fonction de I_1 et I_2. Quand est-il maximal ?
   - **c.** On suppose les trous identiques. L'intensité lumineuse devient I_0. Calculer l'interfrange i au niveau de l'écran. Donner la position x d'une frange brillante en fonction de l'interfrange i.
   - **d.** Définir l'ordre d'interférence. Quel est l'ordre des franges brillantes ?
2. Expliquer qualitativement pourquoi avec une source non monochromatique, les figures d'interférences semblent se brouiller au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre de l'écran.
3. Dans le cas où la source lumineuse utilisée est non monochromatique (les longueurs d'ondes émises sont comprises entre $\lambda_m - \frac{\Delta\lambda}{2}$ et $\lambda_m + \frac{\Delta\lambda}{2}$), calculer $\Delta\lambda$ pour voir nettement 13 franges brillantes. On considère une frange nette si ses maxima aux longueurs d'ondes extrêmes sont distants de moins d'un quart de l'interfrange moyenne.

EXERCICE 4 Miroir de Lloyd (⋆⋆)

Le miroir de Lloyd, représenté en *Figure 3*, est constitué d'une lame de verre plane opaque utilisée comme un miroir plan. La surface de ce miroir est un rectangle de côtés 15 cm et 5 cm environ ; la planéité de ce miroir est parfaite. Ce miroir épais (pour éviter les déformations), donc lourd, est placé sur un support rigide, installé sur un banc optique indéformable. Il est possible à l'aide de la vis V de régler l'inclinaison de ce miroir par rapport aux rayons incidents. La source S ponctuelle éclaire sous incidence rasante un miroir de Lloyd AB. Cette source est placée à distance $\frac{a}{2}$ du miroir et la distance source-bord droit du miroir est notée ℓ. L'écran est placé à une distance d au bout du miroir, et permet d'observer les interférences entre le faisceau d'éclairage direct et le faisceau réfléchi par le miroir.

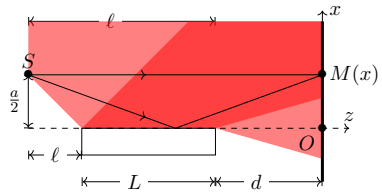


Figure 3 – Dispositif interférentiel

1. Est-ce un dispositif à division du front d'onde ou à division d'amplitude ?
2. Quelles sont les sources secondaires S_1 et S_2 associées à ce dispositif ? Représenter le champ d'interférences.

La réflexion sur un miroir introduit un déphasage de π à l'onde réfléchie.

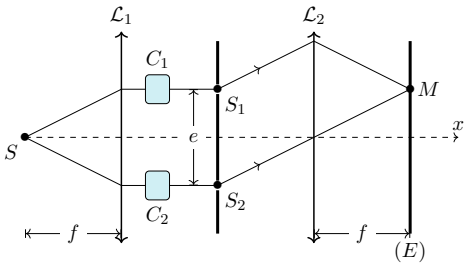
3. Déterminer la différence de marche géométrique et la différence de phase. Les sources secondaires sont-elles cohérentes ? synchrones ? en phase ?
4. En déduire l'expression de l'éclairement sur l'écran. Quelle est la forme des franges obtenues ? Peut-on remplacer la source ponctuelle par une fente fine ?
5. On élargit maintenant la fente source. Sa largeur est b répartie également de part et d'autre de la position $\frac{a}{2}$. En prenant un modèle de fente source qui émet uniformément, exprimer le nouvel éclairement et tracer l'éclairement $I(x)$.

EXERCICE 5 Interféromètre de Rayleigh (⋆⋆)

On considère le dispositif expérimental constitué de deux trous de Young. Une lentille convergente $\mathcal{L}_1$ permet de faire converger les rayons de la lampe à sodium

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

($\lambda = 589$ nm) parallèlement à l'axe optique avant de passer par les trous de Young. Une seconde lentille $\mathcal{L}_2$ vient converger les rayons lumineux issus de $\mathcal{L}_2$ pour les afficher sur un écran.



On met sur l'axe horizontal des rayons lumineux deux cuves identiques de longueur $\ell = 20$ cm contenant de l'air. On observe les interférences sur l'écran.

On rappelle que le *théorème de Malus* précise que les surfaces d'onde sont orthogonales aux rayons lumineux et que le passage d'une onde dans un lentille n'introduit pas de différence de marche sur une *surface d'onde*.

1. Démontrer et appliquer la *formule d'interférences à deux ondes de Fresnel*.
2. On vide la cuve C_1, dans quel sens se déplacent les franges ?
3. Pendant le pompage on observe 98 franges brillantes qui défilent au centre de l'écran et lorsque le vide sera fait, on observera une frange sombre au centre de l'écran. En déduire l'indice de l'air.
4. On remplit C_1 avec de l'hydrogène. Le déplacement total de franges vers le bas entre le moment où C_1 était rempli avec de l'air et le moment où il est rempli avec de l'hydrogène est de 54 franges. Calculer l'indice optique du dihydrogène.

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Lame de verre (⋆⋆)

On considère le dispositif expérimental représenté sur le schéma de la *Figure 4*. Une paroi est percée de trois fentes F_1, F_2, F_3 identiques et très fines, équidistantes de $e = 1$ mm. L'amplitude commune des rayons lumineux est notée A_0. Le système est éclairé par une source S monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 546$ nm, placée au foyer objet d'une lentille convergente dont la distance focale est $f = 30$ cm.

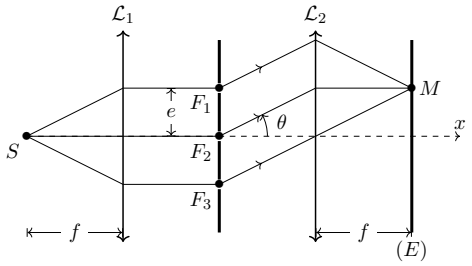


Figure 4 – Montage à trois fentes d'Young

On rappelle que le *théorème de Malus* précise que les surfaces d'onde sont orthogonales aux rayons lumineux et que le passage d'une onde dans un lentille n'introduit pas de différence de marche sur une *surface d'onde*.

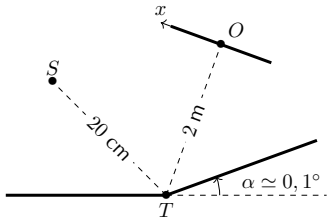
On place un écran E dans le plan focal image d'une deuxième lentille convergente pour étudier la diffraction des rayons (l'angle correspondant à la diffraction est paramétré par θ). On repère un point M sur l'écran, à une distance z de l'axe optique.

1. Dans le cas où F_2 est fermée, comment s'appelle le système ?
   - **a.** Calculer la différence de marche δ, le déphasage φ et l'intensité I au point M. Calculer l'interfrange i. Est-ce visible ?
   - **b.** On place sur le trajet des rayons de F_1 une fine lame de verre, d'indice optique $n = 1,5$ et d'épaisseur $d = 0,1$ mm. Dans quel sens se déplacent les franges ? Calculer la valeur de ce déplacement.
2. On ouvre la fente F_2. Déterminer les trois amplitudes complexes $\underline{a_1}$, $\underline{a_2}$ et $\underline{a_3}$ des vibrations diffractées par les trois fentes. Déterminer φ', le déphasage entre deux ondes consécutives, en fonction du déphasage φ de la première question. En déduire les amplitudes résultantes et calculer l'intensité $I(z)$. Définir ce que sont les franges brillantes et les franges sombres et donner leur intensité lumineuse. Calculer l'interfrange i' en fonction de l'interfrange i de la première question.
3. On introduit la même lame de verre qu'en 1, mais cette fois-ci sur la fente F_2. On appelle ψ le déphasage introduit. Calculer $I(z)$ en fonction de φ' et de ψ. Déterminer les valeurs de l'éclairement pour $\psi = 0$; $\psi = \frac{\pi}{2}$ et enfin $\psi = \pi$. Que vaut d pour avoir $\psi = \frac{\pi}{2}$?

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 7 Miroirs de Fresnel (⋆⋆)

On dispose deux miroirs, orientés d'un angle $\alpha \simeq 0,1°$ de sorte que l'on forme le dispositif des miroirs de Fresnel. La source de lumière S délivre une lumière de longueur d'onde $\lambda = 546$ nm.



1. Trouver la position des sources secondaires et montrer qu'elles peuvent être inscrites sur un même cercle. Montrer que la distance séparant les deux sources secondaires vaut $S_1S_2 = 2\alpha ST$ et calculer la largeur ℓ du champ d'interférences.
2. Déterminer l'éclairement $I(x)$ sur l'écran. On note I_0 l'éclairement maximal.
3. Calculer le nombre de franges brillantes observées et le nombre de franges noires. Qu'observe-t-on à l'écran ? À quel système ce montage est-il équivalent ?
4. En utilisant une source de lumière blanche (400 nm $< \lambda <$ 800 nm), quelles sont les longueurs d'onde éteintes à la position $x \simeq 3$ mm ?

EXERCICE 8 Source étendue spatialement (⋆⋆⋆)

On considère le dispositif des fentes d'Young représenté en *Figure 5*. On rappelle que l'intensité lumineuse au point M sur l'écran est :

$$I(M) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)\right)$$

On considère désormais une source monochromatique spatialement étendue, de longueur L.

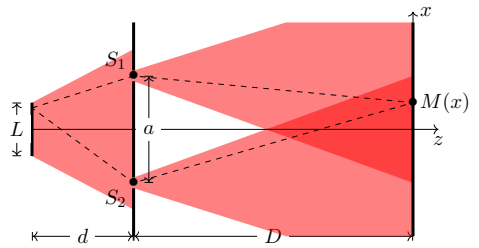


Figure 5 – Dispositif des fentes d'Young

1. Pour un point S donné de la source de hauteur $X \in \left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right]$, exprimer la différence de marche $\delta = (SS_2M) - (SS_1M)$ des deux chemins optiques.
2. Par un simple raisonnement, identifier l'intensité $\mathrm{d}I$ liée à une tranche de hauteur $\mathrm{d}X$ de la source primaire en fonction de $\mathrm{d}X$, L et I.
3. Calculer l'intensité lumineuse totale $I(M)$ reçue en un point M de l'écran et représenter $I(x)$ sur un graphe.
4. Calculer le contraste C en un point M. Que remarque-t-on ?

Ce résultat correspond au théorème de Cittert et Zernike.

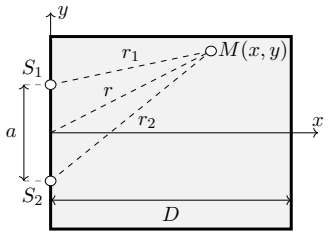
Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 1 Champ d'interférences (⋆)

1 Le schéma du dispositif est représenté ci-contre.
Les signaux en S_1 et S_2 sont des signaux harmoniques de pulsation ω et de même amplitude A. On a donc :

$$s_1\left(\frac{a}{2},t\right) = A\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad s_2\left(-\frac{a}{2},t\right) = A\cos(\omega t)$$

La grandeur mesurée peut être la profondeur d'eau jusqu'au fond de la cuve. L'amplitude A de l'onde serait alors homogène à une longueur.



2 a. D'après le théorème de *Pythagore*, il est possible d'établir :

$$\begin{cases} r_1^2 &= \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 = x^2 \times \left(1+\left(\frac{y-\frac{a}{2}}{x}\right)^2\right) \\ r_2^2 &= \left(y+\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 = x^2 \times \left(1+\left(\frac{y+\frac{a}{2}}{x}\right)^2\right) \end{cases}$$

Un développement limité à l'ordre 1 permet d'établir :

$$\begin{cases} r_1 &\simeq x \times \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{y-\frac{a}{2}}{x}\right)^2\right) \\ r_2 &\simeq x \times \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{y+\frac{a}{2}}{x}\right)^2\right) \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{\delta = r_2 - r_1 \simeq \frac{x}{2}\left(\frac{y+\frac{a}{2}}{x}\right)^2 - \frac{x}{2}\left(\frac{y-\frac{a}{2}}{x}\right)^2 \simeq \frac{ay}{x}}$$

b. L'amplitude de l'onde observée en $M(x,y)$ doit donc être calculée en sommant les amplitudes des ondes issues de S_1 et de S_2 :

$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = A\cos(\omega t - kr_1) + A\cos(\omega t - kr_2)$$

soit :

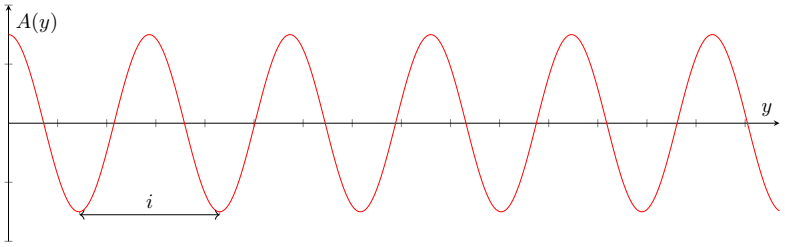
$$s(x,t) = 2A\cos\left(\omega t + k\frac{r_2+r_1}{2}\right)\cos\left(k\frac{r_2-r_1}{2}\right)$$

Or, $r_1 + r_2 \simeq 2x + \underbrace{\frac{y^2+\frac{a^2}{4}}{x}}_{\text{négligeable devant } x}$, on a donc :

$$s(x,t) = \underbrace{2A\cos\left(k\frac{ay}{2x}\right)}_{A(x,y)}\cos(\omega t + kx)$$

c. La fonction $A(y)$ est tracée ci-dessous :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/



d. Pour $x = D$, l'amplitude de l'onde a pour expression $A(D,y) = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{ay}{2D}\right)$. L'interfrange i est la distance séparant deux positions y_1 et y_2 d'amplitudes nulles, soit :
$\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{ay_2}{2D} = \frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{ay_1}{2D} + \pi$
D'où :

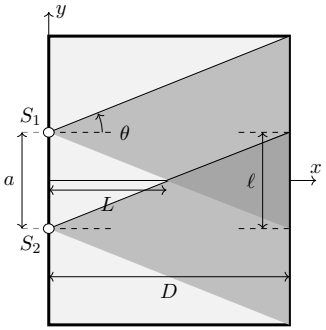
$$\boxed{i = y_2 - y_1 = \frac{\lambda D}{a}}$$

3 a. Pour observer un phénomène de diffraction, il faut que b soit du même ordre de grandeur que λ.

b. Pour estimer la largeur du champ d'interférences, il faut identifier la portion de l'écran où les faisceaux diffractés se recoupent. Le schéma ci-contre représente ce recoupement.
L'angle de diffraction (petit) est $\tan(\theta) \simeq \sin(\theta) \sim \frac{\lambda}{b}$, on a donc :

$$\ell = 2(D-L)\tan(\theta) \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{a}{2L}$$

On en déduit donc que le champ d'interférences est de l'ordre de grandeur de :

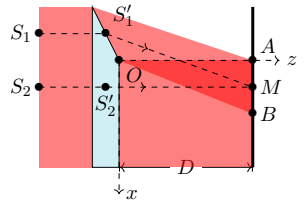


$$\boxed{\ell = 2\left(D - \frac{a}{2\tan(\theta)}\right)\tan(\theta) \sim 2\left(D - \frac{ab}{2\lambda}\right)\frac{\lambda}{b} \sim \frac{2D\lambda}{b} - a}$$

EXERCICE 2 Lame prismatique (⋆⋆)

1 La lumière peut emprunter deux chemins différents pour arriver au même point M à l'écran. L'onde incidente étant cohérente, le dispositif ainsi constitué s'apparente à un dispositif interférentiel par division du front d'onde.

Le champ d'interférences se situe dans la zone où les deux ondes peuvent se superposer (entre les points A et B sur le schéma ci-dessous) :



Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

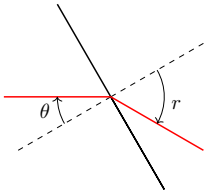
2 Les deux ondes arrivant à l'écran au niveau du point M ont été initialement émises au niveau des points S_1 et S_2. En supposant que S_1 et S_2 sont deux points où les signaux sont en phase, la différence de phase entre les deux signaux au niveau du point M sera :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left((S_1M) - (S_2M)\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left((S_1'M) - (S_2'M)\right)$$

On note que $(S_1S_1') = (S_2S_2')$ d'après le théorème de Malus. En particulier, on considère que si $S_1 = S_2$ sont placés sur l'axe Oz, les deux ondes arrivant en O sont en phase. On considère donc O comme origine des phases.

L'angle de réfraction en sortie de la lame prismatique vérifie la loi de la réfraction de Snell-Descarte : $n\sin(\theta) = \sin(r)$, soit :

$$r = \arcsin\left(n\sin(\theta)\right) \simeq n\theta \simeq 0,75°$$



En plaçant l'origine des phases en O, le déphasage de l'onde provenant de S_1 au niveau du point M est :

$$\Delta\varphi_1(OM) = \overrightarrow{k_1}\cdot\overrightarrow{OM}$$

avec $\overrightarrow{k_1} = \frac{2\pi}{\lambda}(\cos(\theta - r)\ \overrightarrow{u_z} + \sin(\theta - r)\ \overrightarrow{u_x})$. De même, le déphasage $\Delta\varphi_2(OM)$ entre les points O et M en considérant l'onde issue de S_2 est :

$$\Delta\varphi_2(OM) = \overrightarrow{k_2}\cdot\overrightarrow{OM}$$

avec $\overrightarrow{k_2} = \frac{2\pi}{\lambda}\ \overrightarrow{u_z}$.

Le déphasage $\Delta\varphi$ des deux signaux arrivant en M est donc :

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1(OM) - \Delta\varphi_2(OM) = \left(\overrightarrow{k_1} - \overrightarrow{k_2}\right)\cdot\overrightarrow{OM} = \frac{2\pi}{\lambda}\begin{pmatrix}\sin(\theta - r)\\ 0\\ 1-\cos(\theta - r)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\0\\D\end{pmatrix}$$

soit :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\theta x + \varphi_0}$$

En supposant que les deux ondes sortant de la lame prismatique ont les mêmes amplitudes (ce qui est ligitime puisque le facteur de transmission $t = \frac{2n}{n+1}$ est similaire pour une incidence normale et quasi-normale), la formule d'interférences à deux ondes de Fresnel permet d'écrire que :

$$I(x) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\theta x + \varphi_0\right)\right)$$

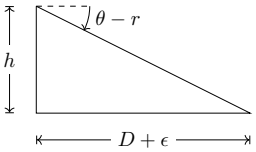
Les franges observées sont **rectilignes**, de même interfrange et **horizontales**. L'interfrange est :

$$\boxed{i = \frac{\lambda}{2\pi(n-1)\theta} \simeq 22\ \mu\text{m}}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

NB : Le déphasage introduit du fait de l'écart d'indice optique entre l'air et la lame de verre a été négligé. On peut montrer que la différence de marche introduite est $\delta = D\left(\sqrt{1+(n-1)^2\theta^2} - 1\right) + \theta x\left(\sqrt{1+(n-1)^2\theta^2} - n\right)$. Pour $(n-1)\theta \ll 1$, un développement limité à l'ordre un permet de retrouver le résultat développé plus haut.

3 La configuration qui permet d'avoir le plus large champ d'interférences est celle représentée sur la figure de l'énoncé. En supposant que l'épaisseur de la lame de verre est ϵ, le rayon réfracté supérieur forme un triangle rectangle représenté ci-dessous.



La largeur du champ d'interférences est ainsi h si $\tan(r-\theta) = \frac{h}{D+\epsilon} = \frac{h}{D}\left(1 - \frac{\epsilon}{D} + \circ(\epsilon)\right)$, avec $\tan(r-\theta) \simeq r - \theta \simeq (n-1)\theta$, d'où :

$$\boxed{D = \frac{h}{(n-1)\theta} \simeq 2,75\ \text{mm}}$$

NB : Il y a donc 125 franges observables.

4 En immergeant le dispositif dans de l'eau, la différence de marche est mutipliée par n_{eau}. L'intensité lumineuse vérifie :

$$I(x) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi n_{\text{eau}}}{\lambda}(n-1)\theta x + \varphi_0\right)\right)$$

l'interfrange est donc :

$$\boxed{i = \frac{\lambda n_{\text{eau}}}{2\pi(n-1)\theta} \simeq 29\ \mu\text{m}}$$

⊃ Source : JR Seigne

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/