Mécanique

(Particules chargées)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Spectrographe de Bainbridge (⋆)

1. Les électrons sont « attirés par les potentiels croissants ». Il faut donc que $\boxed{U \geq 0}$ pour accélérer les électrons.
2. Les ions étant chargés positivements, pour un champ magnétique sortant du plan de la feuille, ils sont déviés vers la droite. On a donc $\boxed{B \geq 0}$.
3. La distance séparant deux ions est AB. Le rayon de la trajectoire étant $R = \frac{v_0}{\omega_c}$. On a donc :

$$d = AB = 2(R_2 - R_1) = 2\left(\frac{41 m_p v_{0_1}}{eB} - \frac{39 m_p v_{0_2}}{eB}\right) = 2\frac{41v_{0_1} - 39v_{0_2}}{eB} m_p$$

La vitesse à laquelle est injectée l'ion dépend de sa masse. D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta\mathcal{E} = W(\overrightarrow{F}_{\text{élec}}) = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = eU \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

On a donc $v_{0_1} = \sqrt{\frac{2eU}{41m_p}} \simeq 2,21 \times 10^5$ m · s^{-1} et $v_{0_2} = \sqrt{\frac{2eU}{39m_p}} \simeq 2,26 \times 10^5$ m · s^{-1}.

On a donc :

$$\boxed{d = \frac{(41v_{0_1} - 39v_{0_2})m_p}{eB} \simeq 4,46 \text{ cm}}$$

EXERCICE 2 Déviation d'électrons (⋆)

1. **a.** Les électrons subissent une force de la forme $\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{E} = e\overrightarrow{\text{grad}}\,(V)$. Pour accélérer le mouvement, il faut que la force soit motrice, donc $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \geq 0$. Comme $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ est dirigé selon $+\overrightarrow{u_x}$, il faut $\overrightarrow{\text{grad}}\,(V) \cdot \overrightarrow{u_x} \geq 0$, soit $V_E - V_C \geq 0$.

   b. En supposant que l'énergie cinétique initiale de l'électron est nulle, le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'électron s'écrit :

$$\Delta\mathcal{E}_c = W_{C\to E}(\overrightarrow{F}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = e\frac{V_E - V_C}{CE} \times CE = e(V_E - V_C) \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}}$$

2. Entre O et A, l'électron évolue dans un champ électrique stationnaire et homogène. L'équation horaire du mouvement peut être trouvée à l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{E}}{m}t^2 + \overrightarrow{v_0}t + \overrightarrow{0}$$

En $x = \ell$, on a donc $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_x} = \ell = v_0 t$, soit $t = \frac{\ell}{v_0}$. Par conséquent,

$$y_A = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_y} = \frac{\ell^2 E}{2v_0^2 m} = \frac{\ell^2 U}{2v_0^2 dm}$$

3. **a.** Entre A et B, l'électron est rigoureusement soumis à son poids. L'équation de la trajectoire est donc censée être une parabole (problème de balistique classique, sans frottements). Néanmoins, l'intensité de la force de pesanteur sur l'électron, de masse m infime, est très faible. La trajectoire est donc sensiblement celle d'une particule isolée : **rectiligne uniforme**.

b. En A, l'électron part vers l'écran avec un angle $\varphi = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}})$ tel que :

$$\tan(\varphi) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{E\ell}{mv_0}}{v_0} = \frac{E\ell}{mv_0^2}$$

Le point d'impact à l'écran a donc pour ordonnée :

$$y_B = y_A + \left(D - \frac{\ell}{2}\right)\tan(\varphi) = \frac{\ell^2 U}{2v_0^2 dm} + \frac{2D-\ell}{2}\frac{U\ell}{dmv_0^2} \Rightarrow \boxed{y_B = \frac{D}{dmv_0^2}U}$$

La position verticale du point B à l'écran est donc bien **proportionnelle** à la valeur de U.

L'essentiel

EXERCICE 3 Cyclotron de Lawrence (⋆⋆)

Une simulation numérique du cyclotron est proposée par l'université de Nantes à cette adresse url :

`http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charges/cyclotron.html`

1. La vitesse d'un proton est v_n à l'entrée d'un dee. Le champ magnétique, en l'absence de champ électrique, n'influe pas sur la vitesse de la particule (la force magnétique ne travaille pas). On peut donc considérer que v_n est la vitesse du proton pendant toute sa durée de vie dans le dee.

   La rayon de courbure du proton dans le dee est :

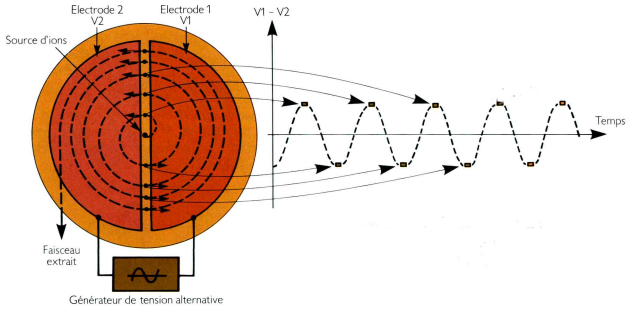
   $$R_n = \frac{v_n}{\omega_c} = \frac{v_n \times m_p}{q_p B}$$

   La durée $T_{1/2}$ est donc égale à :

   $$T_{1/2} = \frac{\pi R_n}{v_n} = \frac{\pi m_p}{q_p B}$$

   Cette durée est indépendante de la position (ou de la vitesse) d'entrée du proton dans un dee. Tout au long du phénomène étudié, on pourra considérer que le proton met une durée $T_{1/2}$ pour passer d'un dee à l'autre : le cyclotron est dit *isochrone*.

2. Les électrons doivent passer dans un sens puis dans l'autre pour passer d'un dee à l'autre, il est donc nécessaire d'utiliser une tension alternative.

   Le cyclotron étant isochrone, il est nécessaire que la fréquence de la tension accélératrice soit :

   $$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2T_{1/2}} = \frac{q_p B}{2\pi m_p} \simeq 15 \text{ MHz}$$

   Le temps de parcours d'un dee à l'autre ayant été négligé.

3. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au proton qui sort d'un dee on obtient :

   $$\Delta\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}m\left(v_{n+1}^2 - v_n^2\right) = q_p U_m$$

   Le vitesse et l'énergie cinétique du proton sont donc :

   $$v_{n+1} = \sqrt{(n+1) \times \frac{2q_p U_m}{m}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{c_n} = nq_p U_m$$

   Le rayon de courbure le plus grand autorisé étant R_s, on en déduit que :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$R_S = \frac{v_S}{\omega_c} = \frac{\sqrt{N \times \frac{2eU_m}{m_p}}}{\frac{eB}{m_p}} = \sqrt{\frac{2Nm_pU_m}{eB^2}} \Rightarrow \boxed{N = \frac{R_S^2 e^2 B^2}{2m_pU_m} \simeq 120 \text{ demi-tours}}$$

4. L'énergie cinétique du proton en sortie du cyclotron est :

$$\mathcal{E}_{c_S} = \frac{1}{2}m_p v_N^2 = \frac{1}{2}m_p N \times \frac{2eU_m}{m_p} = NeU_m \simeq 1,92 \times 10^{-12} \text{ J} \simeq 12,0 \text{ MeV}$$

5. Pour un mouvement ciruclaire uniforme de rayon R, l'accélération d'une particule est $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r}$. On a donc :

$$\mathcal{P} = \underbrace{\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c R^2}}_{\alpha} v^4$$

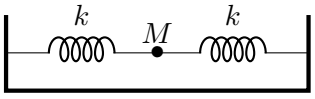
6. L'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa trajectoire demi-circulaire est donc :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c R^2} v^4 \simeq 1,20 \times 10^{-24} \text{ W}$$

L'électron rayonnant de l'énergie, il perd de l'énergie cinétique.
Sur un demi-tour, on a $\boxed{\mathcal{E}_{\text{ray}} = \mathcal{P} \times T_{1/2}}$.

EXERCICE 4 Piège de Paul (⋆⋆)

1. **a.** On a $[a] = [b] = 1$.
   b. Un système masse-ressort en 1D permet de faire un oscillateur harmonique.



L'équation différentielle vérifiée par l'écart x à la position d'équilibre est :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

2. **a.** Dans le cas où $K > 0$, le minimum d'énergie potentielle est trouvée en résolvant :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x} = 2Kx = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2} = 2K > 0$$

La position $x = 0$ est donc une **position d'équilibre inconditionnellement stable**. La trajectoire dans le diagramme de phase $((x, \dot{x})$ ou $(y, \dot{y})$ ou $(z, \dot{z})$) est une ellipse.
   b. Si $K < 0$, l'équation ci-dessus n'a pas de solution : il n'y a pas de position d'équilibre stable.
3. **a.** On a :

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(\mathcal{E}_p) = -2\phi a x\,\vec{u_x} - 2\phi a y\,\vec{u_y} - 2\phi b z\,\vec{u_z}}$$

   b. Les trois équations du mouvement peuvent être écrites sous la forme d'un système correpondant aux trois coordonnées selon $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$ et $\vec{u_z}$.

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -\frac{2\phi a}{m}x \\ \ddot{y} &= -\frac{2\phi a}{m}y \\ \ddot{z} &= -\frac{2\phi b}{m}z \end{cases}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

c. Pour piéger une particule il faut que les trois équations différentielles soient « stables », soit $a > 0$ et $b > 0$. Or $2a + b = 0$, donc a et b sont de signes contraires. Il y aura une équation différentielle non stable qui sera responsable de l'échec du piégeage de la particule.

❹ Régime dynamique.

a. $[\omega_0] = [\phi_0]^\alpha [m]^\beta$ avec $\alpha + \beta = 0$ et $-2\alpha = -1$. On en déduit que

$$\boxed{\omega_0 \propto \sqrt{\frac{\phi_0}{m}}}$$

b. Les nouvelles équations différentielles sont :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \frac{m\omega_0^4}{8\Omega^2} x \\ \ddot{y} &= \frac{m\omega_0^4}{8\Omega^2} y \\ \ddot{z} &= \frac{m\omega_0^4}{2\Omega^2} z \end{cases}$$

c. On peut en déduire, en posant $\omega = \sqrt{\frac{m\omega_0^4}{8\Omega^2}}$ que :

$$\begin{cases} x(t) &= A_x \cos(\omega t) + B_x \sin(\omega t) \\ y &= A_y \cos(\omega t) + B_y \sin(\omega t) \\ z &= A_z \cos(2\omega t) + B_z \sin(2\omega t) \end{cases}$$

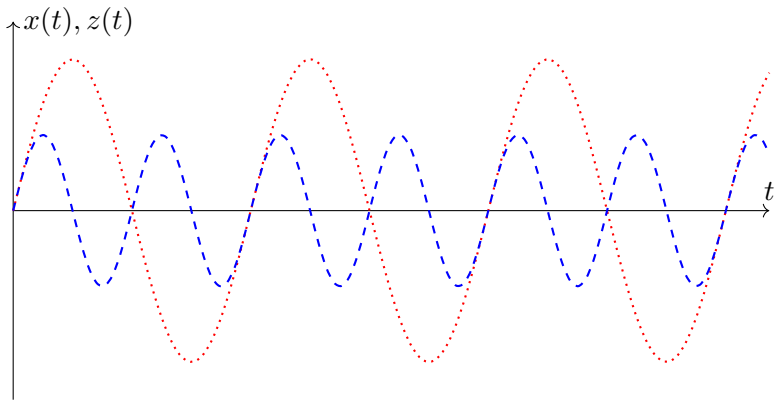
On a donc $\boxed{\omega_x = \omega_y = \frac{\omega_z}{2} = \omega = \sqrt{\frac{m\omega_0^4}{8\Omega^2}}}$.

Il s'agit de trois équations d'oscillateurs harmoniques, le mouvement est d'**amplitude restreinte**, donc dans un **état lié** : les particules sont piégées.

d. La solution proposée doit correspondre aux conditions initiales précisées dans l'énoncé, on en déduit que :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) &= -\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= -\frac{v_0}{2\omega} \sin(2\omega t) \end{cases}}$$

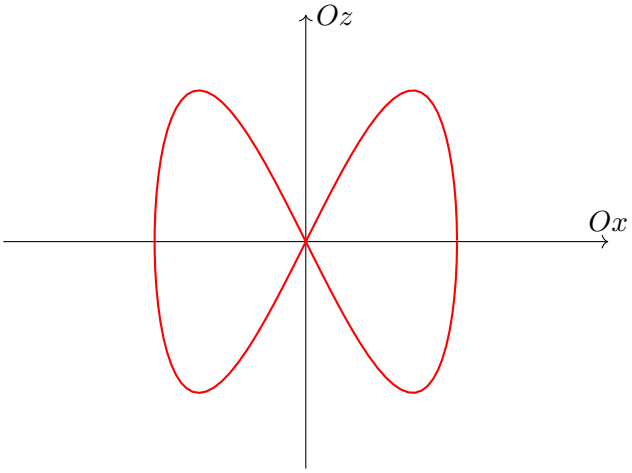
e. On peut ainsi tracer $x(t)$ et $z(t)$:



$z(t)$ a l'allure d'un sinus oscillant deux fois plus rapidement que $x(t)$ et avec une amplitude deux fois plus petite.

f. Le graphe est reproduit ci-dessous :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/



L'allure de la trajectoire est bornée spatialement, le piège est donc efficace.

➲ Source : Agro-Véto, 2011.

EXERCICE 5 Trajectoires de particules (⋆⋆)

1. Le poids des particules microscopiques est **négligeable devant les force magnétique et électrique**.
2. Les forces électrique $\overrightarrow{F_e}$ et magnétique $\overrightarrow{F_m}$ ont pour expression :

$$\boxed{\overrightarrow{F_e} = q\overrightarrow{E}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{F_m} = q\overrightarrow{v_{P/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{B}}$$

3. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la particule P, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen s'écrit :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} + qB_z\begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\dot{x}\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}E_x\\ E_y\end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -qB_z\\ qB_z & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}E_x\\ E_y\end{pmatrix}$$

On trouve donc l'expression demandée avec $\boxed{M = \begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}}$ et $\boxed{B = \begin{pmatrix}0 & -qB_z\\ qB_z & 0\end{pmatrix}}$.

4. En posant $V = \dot{X}$, on commence par réécrire l'équation différentielle d'ordre deux sous la forme d'un système de deux équations différentielles d'ordre un :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{X} &=& V\\ \dot{V} &=& M^{-1}(C+B)V + \frac{q}{m}E\end{array}\right.$$

On peut ensuite discrétiser le système en utilisant le schéma d'*Euler explicite* :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\frac{X_k - X_{k-1}}{T_e} &=& V_{k-1}\\ \frac{V_k - V_{k-1}}{T_e} &=& M^{-1}(C+B)V_{k-1} + \frac{q}{m}E\end{array}\right.$$

On en déduit ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcl}X_k &=& X_{k-1} + T_e V_{k-1}\\ V_k &=& \left(I_2 - T_e.M^{-1}(C+B)\right)V_{k-1} + \frac{q}{m}T_e.E\end{array}\right.$$

On obtient donc $\boxed{A = I_2 - T_e M^{-1}(C+B) = I_2 - \frac{T_e}{m}.(C+B)}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

5 La ligne complétée est la suivante : `np.dot(A,V[-1])+Te*q*np.dot(inv(M),E)`
Une alternative : `np.dot(A,V[i-1])+Te*q/m*E`

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Chambre à brouillard (⋆⋆)

1 La particule ponctuelle, de charge q et de masse m, est soumise, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, à :

- La force magnétique $\overrightarrow{F}_{\text{mag}} = q\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{B}$.
- La force de frottement fluide $\overrightarrow{F}_v = -\lambda\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dont le mouvement est étudié dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} + qB\begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\dot{x}\end{pmatrix}$$

En posant $\underline{\xi} = x + iy$, on a :

$$m\ddot{\underline{\xi}} = -\lambda\dot{\underline{\xi}} - iqB\dot{\underline{\xi}} \quad \text{soit} \quad \ddot{\underline{\xi}} + \frac{\lambda + iqB}{m}\dot{\underline{\xi}} = 0$$

L'équation caractéristique du mouvement (selon $\dot{\underline{\xi}}$) est :

$$r + \frac{\lambda + iqB}{m} = 0 \Rightarrow r = -\frac{\lambda + iqB}{m}$$

La solution est donc de la forme $\dot{\underline{\xi}}(t) = Ae^{-\frac{\lambda+iqB}{m}t}$ avec $\dot{\underline{\xi}}(0) = A = v_0 + iv_1$. On obtient ainsi :

$$\dot{\underline{\xi}}(t) = (v_0 + iv_1)e^{-\frac{\lambda+iqB}{m}t} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) &= v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t}\cos(\omega_c t) + v_1 e^{-\frac{\lambda}{m}t}\sin(\omega_c t) \\ \dot{y}(t) &= v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t}\sin(\omega_c t) + v_1 e^{-\frac{\lambda}{m}t}\cos(\omega_c t) \end{cases}$$

avec $\omega_c = \frac{qB}{m}$ la pulsation cyclotron. Pour avoir $\underline{\xi}(t)$, il faut intégrer l'équation :

$$\dot{\underline{\xi}}(t) = (v_0+iv_1)e^{-\frac{\lambda+iqB}{m}t} \Rightarrow \underline{\xi}(t) = -\frac{m(v_0+iv_1)}{\lambda+iqB}e^{-\frac{\lambda+iqB}{m}t} + \text{cte} = -\frac{m(v_0+iv_1)(\lambda-iqB)}{\sqrt{\lambda^2+q^2B^2}}e^{-\frac{\lambda+iqB}{m}t} + \text{cte}$$

On a ainsi :

$$\underline{\xi} = -\frac{(mv_0\lambda + mqv_1B) + i(mv_1\lambda - mv_0qB)}{\sqrt{\lambda^2+q^2B^2}}\left(e^{-\frac{\lambda+iqB}{m}t} - 1\right)$$

On a donc :

$$\begin{cases} x(t) &= -A\left(e^{-\frac{\lambda}{m}t}\cos(\omega_c t) - 1\right) - Ce^{-\frac{\lambda}{m}t}\sin(\omega_c t) \\ y(t) &= Ae^{-\frac{\lambda}{m}t}\sin(\omega_c t) - C\left(e^{-\frac{\lambda}{m}t}\cos(\omega_c t) - 1\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad A = \frac{mv_0\lambda + mqv_1B}{\sqrt{\lambda^2+q^2B^2}} \quad \text{et} \quad C = \frac{mv_1\lambda - mv_0q}{\sqrt{\lambda^2+q^2B^2}}$$

2 Le point asymptote est le point $P(A, C)$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. On peut tracer la trajectoire de la particule M :

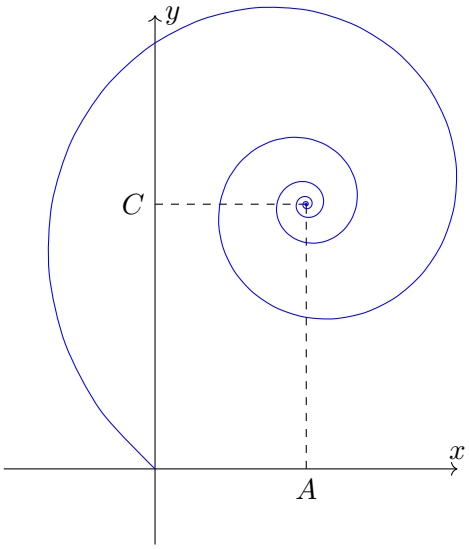


Figure 1 – Mouvement spiralaire ($\omega_c \gg 1$) - cas de l'électron.

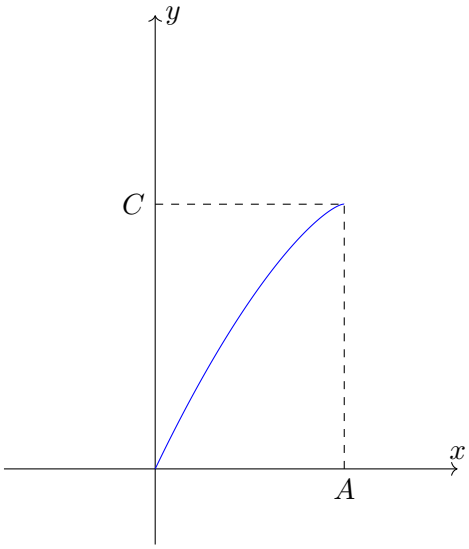


Figure 2 – Mouvement amorti ($\omega_c < 1$) - cas des noyaux.

La forme de la trajectoire dépend du rapport $\frac{q}{m}$.

- Pour un rapport élevé, le mouvement sera spiralaire comme dans le cas de l'électron.
- Pour un rapport faible, le mouvement sera directement amorti, comme dans le cas des noyaux.

4.
- Concernant les électrons : leur trajectoire est une spirale. Les spirales étant non concentriques, on peut suspecter la présence d'un champ électrique local déviant les électrons. Le sens de rotation est le sens horaire. Les électrons, de charge négative, tournant dans le sens horaire, on en déduit que le champ magnétique est entrant dans le plan de la feuille.
- Les pions π^+ et π^- sont chargés électriquement. Le pion π^- tourne dans le même sens que l'électron : leur charge est donc de même signe, contrairement aux pions π^+. Un pion π^+ semble pouvoir se désintégrer en un neutrino muonique ν et un muon μ^+.

EXERCICE 7 Effet Zeeman (⋆⋆)

1. L'électron M, de charge $-e$ et de masse m, est soumis, dans le référentiel $\mathcal{R}_{lab}$ supposé galiléen, aux forces suivantes :
   - La force de rappel élastique : $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$.
   - La force magnétique : $\overrightarrow{F}_{\text{mag}} = -e\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_{lab}} \wedge \overrightarrow{B}$

   L'équation du mouvement de M est donc déterminée par la deuxième loi de Newton :

$$m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_{lab}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_{\text{mag}}$$

   soit :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = -k\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} - eB\begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\dot{x}\\ 0\end{pmatrix}$$

   On obtient ainsi le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c\dot{y} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} - \omega_c\dot{x} + \omega_0^2 y &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{k}{m}z &= 0 \end{cases}$$

2. Selon la direction (Oz), l'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\ddot{z}(t) + \frac{k}{m} z(t) = 0$$

Les solutions sont de la forme $Z(t) = Z_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_z)$.

3 Dans le plan (Oxy), on pose $\underline{\xi} = x + iy$. On peut alors établir l'équation différentielle complexe suivante :

$$\ddot{\underline{\xi}}(t) - i\omega_c \dot{\underline{\xi}}(t) + \omega_0^2 \underline{\xi}(t) = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - i\omega_c r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant étant $\Delta = -\omega_c^2 - 4\omega_0^2 \simeq -4\omega_0^2 \leq 0$, on en déduit que les racines de l'équation sont :

$$r_{1,2} \simeq i\frac{\omega_c}{2} \pm i\omega_0$$

En posant $\omega_L = \frac{\omega_c}{2}$ la pulsation de Larmor, on obtient :

$$\underline{\xi}(t) = \underline{A} e^{i(\omega_L + \omega_0)t} + \underline{B} e^{i(\omega_L - \omega_0)t}$$

Le mouvement obtenu est donc celui d'une rotation circulaire légèrement perturbée par un champ magnétique : une combinaison linéaire d'une rotation à pulsations $\omega_c \pm \omega_0$
La solution est donc décomposable dans une base de solutions de la forme :

$$\begin{cases} x &= x_0 \cos((\omega_L + \omega_0)t) \\ y &= y_0 \sin((\omega_L + \omega_0)t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= x_0 \cos((\omega_L - \omega_0)t) \\ y &= y_0 \sin((\omega_L - \omega_0)t) \end{cases}$$

Ces deux solutions sont les deux *polarisations* possibles de l'électron, autrement dit deux états orthogonaux dans la base des solutions possibles de l'équation différentielle du mouvement.

4 L'écart en longueurs d'onde $\Delta\lambda$ entres les deux polarisations possibles est :

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c}{|\omega_{\text{min}}|} - \frac{2\pi c}{|\omega_{\text{max}}|} = 2\pi c \left(\frac{1}{\omega_0 - \omega_L} - \frac{1}{\omega_0 + \omega_L} \right) \simeq \frac{2\pi c}{\omega_0} \left(1 + \frac{\omega_L}{\omega_0} - \left(1 - \frac{\omega_L}{\omega_0} \right) \right) \simeq \frac{4\pi c \omega_L}{\omega_0^2}$$

Or $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda}$ et $\omega_L = \frac{eB}{2m}$, on peut donc écrire :

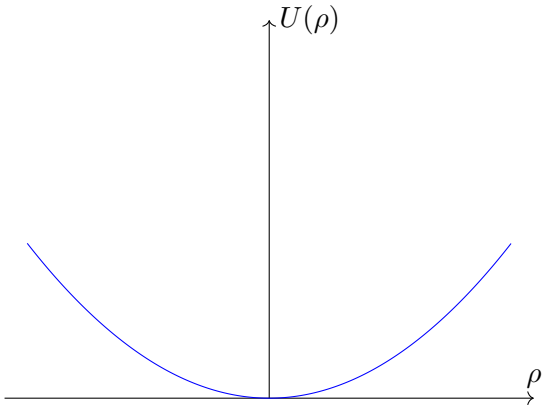
$$\Delta\lambda = \frac{eB\lambda^2}{2m\pi c}$$

5 On calcule $\Delta\lambda \simeq 0,032$ nm ≤ 1 nm. Cet écart spectral n'est pas observable en salle de TP.

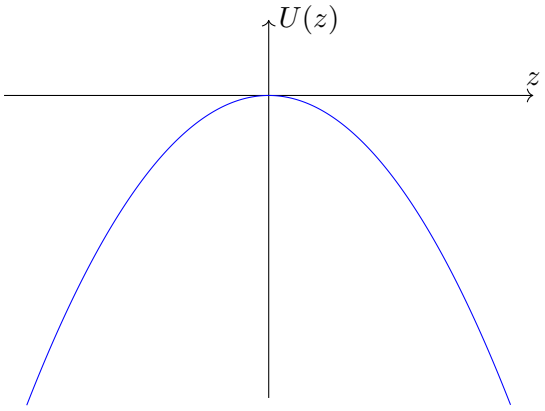
- À l'oeil nu, à l'aide d'un goniomètre, on est capable de distinguer très subtilement le doulet du sodium ($\Delta\lambda \simeq 0,6$ nm).
- Un spectromètre équipant un Lycée a habituellement une résolution de $0,5$ nm.

EXERCICE 8 Piège de Penning (⋆⋆⋆)

1 **a.** Les graphes de $V(\rho)$ dans le plan (Oxy) et de $V(z)$ sur l'axe (Oz) sont tracés ci-dessous.



$V(\rho)$ dans le plan (Oxy)



$V(z)$ sur l'axe (Oz).

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Les points vérifiant $\rho = 0$ semblent être des points d'équilibre stables (dans un puits d'énergie potentielle puisque $\mathcal{E}_p(\rho) = -eV(\rho)$). En revanche, il semblerait que le plan $z = 0$ soit un plan instable puisqu'il s'agit d'un maximum d'énergie potentielle.

b. La force $\overrightarrow{F}$ à laquelle est soumis l'électron, en l'absence de pesanteur et de frottements, vérifie :

$$\overrightarrow{F} = +\overrightarrow{\text{grad}}\,(eV(x,y,z)) = e \times \left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\overrightarrow{u_z}\right)$$

avec $V(\overrightarrow{r}) = V(x,y,z) = \frac{V_0}{2d^2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$, soit :

$$\overrightarrow{F} = \frac{eV_0}{d^2} \times (x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} - 2z\,\overrightarrow{u_z})$$

2 L'électron M étant soumis uniquement à la force $\overrightarrow{F}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, l'équation de son mouvement est déterminée par la deuxième loi de Newton :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \frac{eV_0}{d^2}\begin{pmatrix}x\\ y\\ -2z\end{pmatrix}$$

a. Le mouvement longitudinal vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{z} + \frac{eV_0}{2md^2}z = 0$$

Il s'agit d'équations différentielles d'oscillateur harmonique. On note ω_L la pulsation propre :

$$\boxed{\omega_L = \sqrt{\frac{2eV_0}{md^2}} \simeq 4,69 \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

La fréquence propre du mouvement est donc $\boxed{\nu_L = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2V_0}{md^2}} \simeq 7,46 \times 10^7 \text{ Hz}}$ et la période propre $\boxed{T_L = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2V_0}{md^2}}} \simeq 13,4 \text{ ns}}$.

On a donc :

$$z(t) = Z_0 \cos(\omega_L t + \varphi_z)$$

avec Z_0 et φ_z deux constantes à déterminer en fonction des conditions initiales.

Le mouvement est donc borné pour deux raisons :

- La particule évolue dans un puits de potentiel. Elle est dans un état lié, quelle que soit son énergie mécanique.
- Les équations horaires du mouvement transverses sont des fonctions bornées.

b. Le mouvement transverse vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \frac{V_0}{md^2}x \\ \ddot{y} &= \frac{V_0}{md^2}y \end{cases}$$

Il s'agit d'équations différentielles semblables à celle d'un oscillateur harmonique. Néanmoins, les solutions sont hyperboliques.

Les solutions sont donc de la forme :

$$x(t) = X_0 \text{ch}\left(\frac{\omega_L}{\sqrt{2}}t + \varphi_x\right) \quad \text{et} \quad y(t) = Y_0 \text{ch}\left(\frac{\omega_L}{\sqrt{2}}t + \varphi_y\right)$$

L'amplitude du mouvement est donc non bornée. Les deux fonctions divergent.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3 a. Avec la présence du champ magnétique, les équations du mouvement deviennent :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \frac{eV_0}{d^2}\begin{pmatrix}x\\ y\\ -2z\end{pmatrix} - eB\begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\dot{x}\\ 0\end{pmatrix}$$

Selon la direction (Oz), le mouvement reste identique. En revanche, on peut poser $\underline{X} = x + iy$ tel que :

$$m\dot{X} + ieB\underline{\dot{X}} - \frac{eV_0}{d^2}\underline{X} = 0$$

L'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène est donc :

$$r^2 - i\frac{eB}{m}r - \frac{eV_0}{md^2} = 0$$

Le discriminant est $\Delta = -\frac{e^2B^2}{m^2} + 4\frac{eV_0}{md^2}$. Deux solutions sont possibles :

- Si $\sqrt{\frac{4mV_0}{ed^2}} \geq B$ alors $\Delta \geq 0$ et les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = i\frac{eB}{2m} + \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{eV_0}{md^2} - \frac{e^2B^2}{m^2}} = i\frac{\omega_c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2\omega_L^2 - \omega_c^2} \quad \text{et} \quad r_2 = i\frac{\omega_c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2\omega_L^2 - \omega_c^2}$$

- Si $\sqrt{\frac{4mV_0}{ed^2}} \leq B$ alors $\Delta \leq 0$ et les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = i\frac{\omega_c}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_L^2} \quad \text{et} \quad r_2 = i\frac{\omega_c}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_L^2}$$

Dans la situation de l'énoncé, $\Delta = -1,1 \times 10^{24}$, $\omega_L = \sqrt{\frac{2eV_0}{md^2}} \simeq 4,69 \times 10^8$ rad $\cdot$ s^{-1} et $\omega_c = \frac{eB}{m} \simeq 1,05 \times 10^{12}$ rad $\cdot$ s^{-1}.
On est donc dans la deuxième situation, avec :

$$\underline{X}(t) = \underline{A}e^{i\left(\frac{\omega_c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_L^2}\right)t} + \underline{B}e^{i\left(\frac{\omega_c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_L^2}\right)t}$$

avec $\omega_L \ll \omega_c$, on peut approximer :

- $\frac{\omega_c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_L^2} \simeq \omega_c - \frac{1}{2}\frac{\omega_L^2}{\omega_c} \mathrel{\hat{=}} \omega_c' \simeq 1,05 \times 10^{12}$ rad $\cdot$ s^{-1} (soit $\omega_c' \simeq \omega_c$).
- $\frac{\omega_c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_L^2} \simeq +\frac{1}{2}\frac{\omega_L^2}{\omega_c} \mathrel{\hat{=}} \omega_M \simeq 1,04 \times 10^5$ rad $\cdot$ s^{-1}.

b. Les solutions de la trajectoire sont de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\underline{X}(t) &=& \underline{A}e^{i\omega_c' t} + \underline{B}e^{i\omega_M t}\\ z(t) &=& Z_0\cos(\omega_L t + \varphi_z)\end{array}\right.$$

Les conditions initiales sont :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\underline{X}(0) &=& \underline{A} + \underline{B} = a\\ z(0) &=& Z_0\cos(\varphi_z) = a\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl}\underline{\dot{X}}(0) &=& i\omega_c'\underline{A} + i\omega_M\underline{B} = 0\\ z(0) &=& Z_0\omega_L\sin(\varphi_z) = 0\end{array}\right.$$

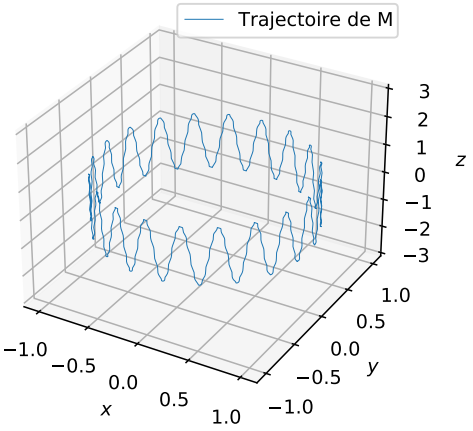
Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

d'où :

$\boxed{\underline{A} = -\dfrac{a\omega_M}{\omega'_c - \omega_M}}$ et $\boxed{\underline{B} = \dfrac{a\omega'_c}{\omega'_c - \omega_M}}$, $\boxed{Z_0 = a}$ et $\boxed{\varphi_z = 0}$.

Les solutions sont donc de la forme :

$$\begin{cases} x(t) &= -\frac{a\omega_M}{\omega'_c-\omega_M}\cos(\omega'_c t) + \frac{a\omega'_c}{\omega'_c-\omega_M}\cos(\omega_M t) \\ y(t) &= -\frac{a\omega_M}{\omega'_c-\omega_M}\sin(\omega'_c t) + \frac{a\omega'_c}{\omega'_c-\omega_M}\sin(\omega_M t) \\ z(t) &= a\cos(\omega_L t) \end{cases}$$

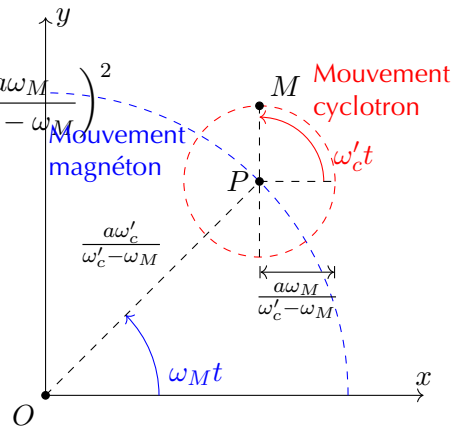


La courbe paramétrée de la position de M est représentée ci-contre.

On peut remarquer que :

$$\left[x - \frac{a\omega'_c}{\omega'_c - \omega_M}\cos(\omega_M t)\right]^2 + \left[y - \frac{a\omega'_c}{\omega'_c - \omega_M}\sin(\omega_M t)\right]^2 = \left(\frac{a\omega_M}{\omega'_c - \omega_M}\right)^2$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle de rayon $R = \frac{a\omega_M}{\omega'_c-\omega_M}$ et de centre $P\left(\frac{a\omega'_c}{\omega'_c-\omega_M}\cos(\omega_M t)\ ;\ \frac{a\omega'_c}{\omega'_c-\omega_M}\sin(\omega_M t)\right)$.



Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/