Mécanique

(Particules chargées)

Outils informatique : Méthode d'Euler explicite pour équations différentielles matricielles

Lorsqu'un système d'équations différentielles linéaires peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{X} + AX = B$$

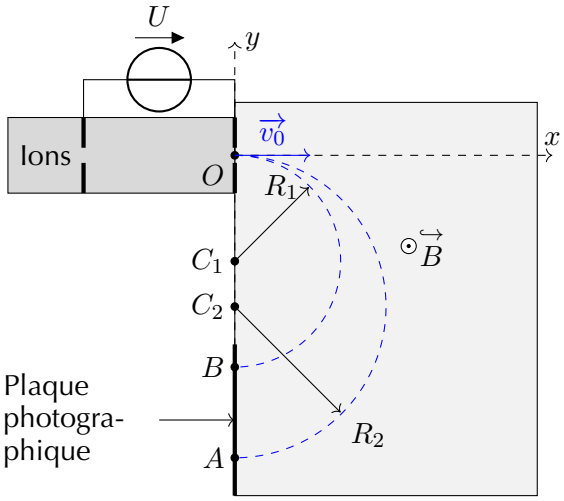
avec $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dots \\ \dot{x_n} \end{pmatrix}$, la résolution numérique de l'équation par la méthode d'Euler explicite consiste à définir par récurrence la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $X_k = X(kT_e) = \begin{pmatrix} x_1(kT_e) \\ \dots \\ x_n(kT_e) \end{pmatrix}$, avec T_e la *période d'échantillonnage* de la simulation numérique.

La discrétisation de l'équation différentielle conduit donc à la relation de récurrence suivante :

$$\frac{X_k - X_{k-1}}{T_e} = -AX_{k-1} + B \quad \text{soit} \quad \boxed{X_k = (I_n - T_eA)X_{k_1} + T_eB}$$

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Spectrographe de Bainbridge (⋆)



Dans ce spectrographe, des ions $^{39}K^+$ et $^{41}K^+$ sont accélérés sous l'action d'une tension U (on néglige la vitesse des ions à l'entrée de la chambre d'accélération), pénètrent ensuite dans un champ magnétostatique uniforme transversal $\vec{B}$ et viennent impressionner la plaque photographique.

1. Quel doit être le signe de U pour que les ions atteignent la chambre de déviation ?
2. Quel doit être le sens du champ $\vec{B}$ pour que les ions atteignent la plaque photographique ?
3. Calculer la distance d séparant les traces des deux isotopes sur la plaque.

Données : $B \simeq 0,1$ T, $|U| \simeq 10$ kV, $m_p \simeq m_n \simeq 1,6 \times 10^{-27}$ kg, $e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ C.

EXERCICE 2 Déviation d'électrons (⋆)

Dans un oscilloscope analogique, un faisceau d'électrons émis en un point C avec une vitesse quasi nulle est accéléré par une tension U_0 entre les points C et E situés sur un axe (Ox). Puis il pénètre en O, avec la vitesse $\vec{v_0} = v_0\,\vec{u_x}$ dans le champ électrique $\vec{E}$ supposé uniforme régnant entre deux plaques parallèles métalliques, symétriques par rapport au plan (Oxz), de longueur ℓ et séparées par une distance d.

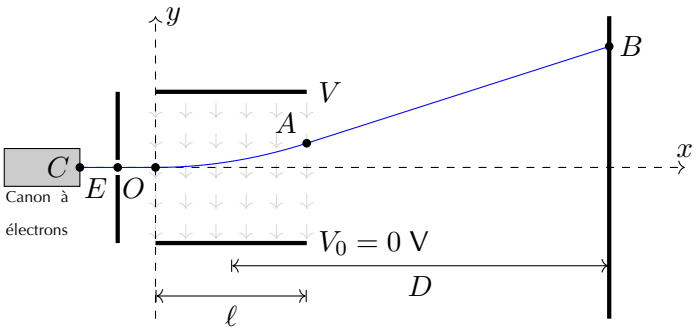


Figure 1 – Dispositif expérimental

Le champ est créé par une tension $U = V - V_0$ appliquée entre ces plaques. Le faisceau sort en A de la zone où règne le champ, puis il atteint finalement l'écran de l'oscilloscope en un point B (spot lumineux). L'écran est à la distance D du milieu des plaques.

1. **a.** Indiquer, en le justifiant, le signe de $\boxed{V_E - V_C}$.

b. Calculer, en fonction de $U_0 = |V_E - V_C|$, la norme v_0 de la vitesse au point O d'un électron de masse m et de charge $-e$.

2. Déterminer l'équation de la trajectoire d'un électron entre O et A. En déduire l'ordonnée y_A du point de sortie A. On pourra utiliser la relation $E = \frac{U}{d}$ valable ici.

3. **a.** Quelle est la nature du mouvement d'un électron entre A et B, où ne règne aucun champ ?

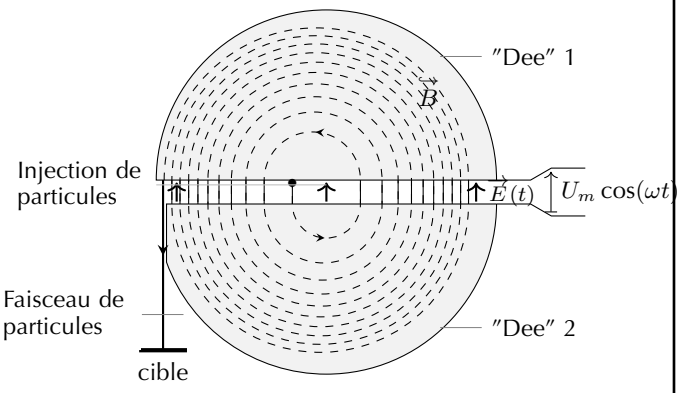
b. Montrer que l'ordonnée y_B du spot est proportionnelle à la tension U appliquée entre les plaques.

Données : $U_0 \simeq 1000$ V ; $m \simeq 9,1 \times 10^{-31}$ kg ; $e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ C.

L'essentiel

EXERCICE 3 Cyclotron de Lawrence (⋆⋆)

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommés *dees* et séparés par un intervalle étroit. Un champ magnétique uniforme $\vec{B}(B \simeq 1,0$ T) règne à l'intérieur des dees, sa direction est parallèle à l'axe de ces demi-cylindres.



Un champ électrostatique variable $\vec{E}$ peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les dees en appliquant entre les dees une tension alternative sinusoidale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 10^5$ V lorsque le proton traverse cet espace. Les protons, de masse $m_p \simeq 1,67 \times 10^{-27}$ kg et de charge électrique $q_p = e$, sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque dee, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est $R_s \simeq 50$ cm.

1. Donner l'expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de m_p, e et B. Qu'en déduisez-vous ?

2. Justifier le choix d'une tension $u(t)$ alternative sinusoïdale.

3. En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence f de la tension alternative sinusoidale $u(t) = U_m \sin(2\pi f t)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un dee à l'autre.

4. Déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de e, R_s, B, m_p et U_m. Effectuer l'application numérique.

5. Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{cs}$ des protons à la sortie du cyclotron.

Puissance rayonnée. Toute particule (non relativiste) chargée de charge q et d'accélération a rayonne une puissance $\mathcal{P}_r$, donnée par la *formule de Larmor* :

$$\mathcal{P}_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

où μ_0 est une constante appelée perméabilité du vide qui vaut $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H · m^{-1}. On rappelle que c est la vitesse de la lumière dans le vide.

6. Montrer qu'une particule chargée de charge q, de vitesse v, qui décrit une trajectoire circulaire de rayon R, rayonne une puissance $\mathcal{P}_r$ de la forme : $\mathcal{P}_r = \alpha v^4$. Exprimer le coefficient α en fonction de q, c, μ_0 et R.

7. Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_s \simeq 50$ cm. Conclure.

EXERCICE 4 Piège de Paul (⋆⋆)

Les techniques d'analyse de la matière par spectrométrie de masse occupent une place grandissante, notamment dans l'étude de composés biologiques. Après ionisation, la matière est injectée dans un système analyseur, capable de séparer les composants élémentaires en fonction de leurs masses. L'objet de cette partie est la présentation et l'étude d'un type d'analyseur : l'analyseur à piège à ions. Le principe repose sur le piégeage de la matière ionisée au voisinage d'une position d'équilibre stable. Le composant principal est un piège de Paul, mis au point dans les années 1950 par le physicien allemand Wolfgang Paul. Ce travail lui vaudra d'être récompensé par une partie du prix Nobel de physique, en 1989.

Le piège de Paul, dont le schéma est représenté en *Figure 2*, est constitué de trois électrodes. Deux électrodes en forme de coupelles qui sont reliées à la masse d'un générateur et une électrode en forme d'anneau qui est portée au potentiel électrique U.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

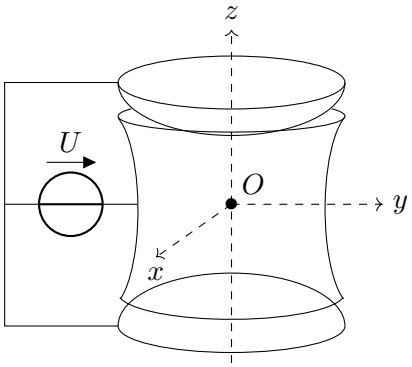


Figure 2 – Piège de Paul

Du fait de la forme des électrodes et de la tension électrique, les particules chargées subissent, au voisinage de O, une force qui dérive de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p(x,y,z) = \phi(a(x^2+y^2)+bz^2)$$

où ϕ dépend de la charge de la particule et de la tension U ; et a et b sont deux constantes.

L'objectif de l'exercice est d'apprécier les conditions de piégeage d'une particule. Dans la suite, on considère que la particule est complètement piégée si elle se comporte comme un oscillateur harmonique dans les trois dimensions de l'espace. Dans tout le problème, l'étude est réalisée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

1. Préliminaire
   - **a.** D'un point de vue dimensionnel, on a $[\phi] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^{-2}$. En déduire la dimension de a et b.
   - **b.** Proposer un dispositif simple permettant de réaliser un oscillateur harmonique à une dimension.
2. Étude d'un mouvement unidimensionnel

   Un point matériel M de masse m se déplace le long d'un axe Ox, au voisinage du point O. Pour cette étude, la seule force $\overrightarrow{F}$ à considérer dérive de l'énergie potentielle :

   $$\mathcal{E}_p(x) = Kx^2$$

   où K est une constante positive ou négative.
   - **a.** Dans le cas où $K>0$, montrer que $x=0$ est une position d'équilibre stable. Tracer alors l'allure de la trajectoire de phase de M dans ce cas.
   - **b.** Que se passe-t-il si $K<0$?
3. Étude du régime statique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel

   Dans cette partie, la tension $U=U_0$ est constante et il en est donc de même pour $\phi=\phi_0$. Le système étudié est un point matériel M de masse m. La seule force $\overrightarrow{F}$ qu'il subit est la force qui dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x,y,z)$.
   - **a.** Exprimer $\overrightarrow{F}$ en fonction de a, b, ϕ_0, ainsi que de x, y, z et des vecteurs associés.
   - **b.** Établir les trois équations du mouvement suivant $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$.
   - **c.** On admet qu'en conséquence des équations fondamentales de l'électromagnétisme, dans ce cas statique, a et b doivent vérifier la relation :

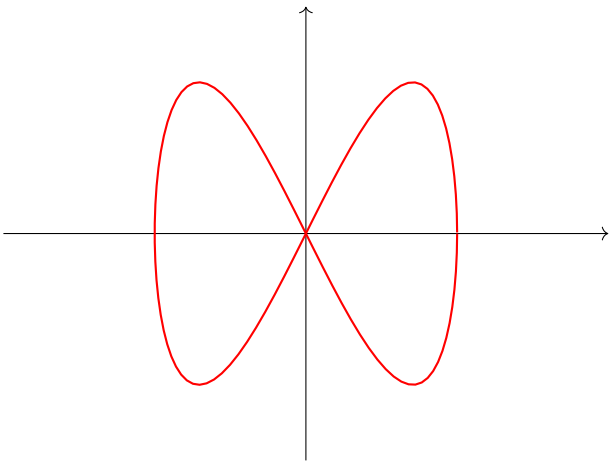
     $$2a+b=0$$

     Que peut-on déduire quant à la possibilité de piéger une particule chargée dans ce dispositif ?
4. Étude du régime dynamique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel

   L'idée de Wolfgang Paul est de contourner cette impossibilité de piéger une particule chargée à l'aide d'un potentiel purement statique, en utilisant un potentiel oscillant de pulsation Ω, de sorte que $\phi = \phi_0\cos(\Omega t)$.
   - **a.** Par analyse dimensionnelle, déterminer la fréquence ω_0 caractéristique du piège en fonction ϕ_0 et m. Dans le cas où $\Omega \gg \omega_0$, on montre que tout se passe, approximativement, comme si la particule évoluait avec une énergie potentielle effective :

     $$\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}(x,y,z) = \frac{m\omega_0^4}{16\Omega^2}(x^2+y^2+4z^2)$$

   - **b.** Écrire les nouvelles équations différentielles vérifiées par x, y et z.
   - **c.** Montrer que la particule est piégée. Exprimer les pulsations d'oscillation ω_x, ω_y et ω_z selon Ox, Oy et Oz en fonction de ω_0 et Ω.
   - **d.** À $t=0$, la particule est injectée en $O(0,0,0)$ avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v_0(\overrightarrow{u_x}+\overrightarrow{u_z})$. Calculer les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
   - **e.** Représenter sur le même graphique les trois fonctions.
   - **f.** L'allure de la trajectoire de la particule est tracée ci-dessous.



Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Reproduire cette figure en identifiant, en le justifiant, les axes Ox et Oz. Conclure quant à l'efficacité du piège.

EXERCICE 5 Trajectoires de particules (⋆⋆)

La trajectoire des particules chargées dans l'atmosphère est liée au champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_z\,\overrightarrow{u_z}$ et au champ électrique $\overrightarrow{E} = E_x\,\overrightarrow{u_x} + E_y\,\overrightarrow{u_y}$ ambiants.

On considère qu'une particule P, de masse m et de charge q (ion, proton, électron, etc) est soumise à :

- une force de frottement de la forme $\overrightarrow{F} = -c\overrightarrow{v_{P/\mathcal{R}}}$.
- la force électrique $\overrightarrow{F_e}$.
- la force magnétique $\overrightarrow{F_m}$

1. Préciser pour quelle raison le poids de la particule n'est pas apparent dans le bilan des forces auxquelles est soumise la particule P.
2. Donner les expressions des forces électriques $\overrightarrow{F_e}$ et magnétique $\overrightarrow{F_m}$ en fonction de q, $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{v_{P/\mathcal{R}}}$.
3. Établir les équations de la dynamique régissant l'évolution de la trajectoire $\overrightarrow{OP} = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y}$ dans le plan $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. Montrer que ce système d'équations peut s'écrire :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + B\dot{X} = qE \qquad (1)$$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et M et B deux matrices carrées à exprimer en fonction de m, q et B_z.

On pose $V = \dot{X}$, et on associe des suites $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à ces deux fonctions telles que $X_k = X(t_k)$ et $V_k = V(t_k)$, $t_k = kT_e$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $T_e \in R$ la période d'échantillonnage de la résolution numérique.

4. Montrer que la discrétisation selon le schéma d'*Euler explicite* de l'*équation différentielle 1* conduit à résoudre par récurrence le système matriciel suivant :

$$\begin{cases} X_k &= X_{k-1} + T_e V_{k-1} \\ V_k &= AV_{k-1} + \frac{q}{m} \times T_e.E \end{cases}$$

où l'on exprimera la matrice A à partir de T_e, M, C, B et la matrice identité I_2.

La résolution numérique du problème est faite à l'aide d'un court programme *python* présenté ci-après.

```
import numpy as np
from numpy.linalg import inv

m=1 #Masse de la particule [uma]
q=1 #Charge électrique de la particule [e]
bz=1 #Champ magnétique [T]
c=1 #Coefficient d'amortissement [uma/s]
ex,ey=0,0.0 #Champ électrique [V/m]
vx0,vy0 = 0,.5 #Vitesse initiale [m/s]
Tmax=20 #Durée de l'expérience [s]
N = 1000 #Nombre de points
Te=Tmax/N #Durée d'échantillonnage [s]

M=Expression à déterminer #Matrice de
masse
C=np.array([[c,0],[0,c]]) #Matrice
d'amortissement
B=Expression à déterminer #Matrice de
champ magnétique
E=np.array([ex,ey]) #Vecteur champ
électrique
I=np.array([[1,0],[0,1]]) #Matrice
identité
A=Expression à déterminer

X=np.array([[0,0]]) #Vecteur position
V=np.array([[vx0,vy0]]) #Vecteur vitesse

t=np.linspace(0,Tmax,N) #Suite du temps

for i in range(1,N) :
    X=np.append(X,[X[-1]+Te*V[-1]],axis=0)
    V=np.append(V,[Expression à
déterminer],axis=0)
```

5. Avec le module *numpy*, le produit matriciel $G \times H$ se note `np.dot(G,H)` et G^{-1} se note `inv(G)`. Compléter l'expression à déterminer pour compléter le tableau `V` par récurrence.

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Chambre à brouillard (⋆⋆)

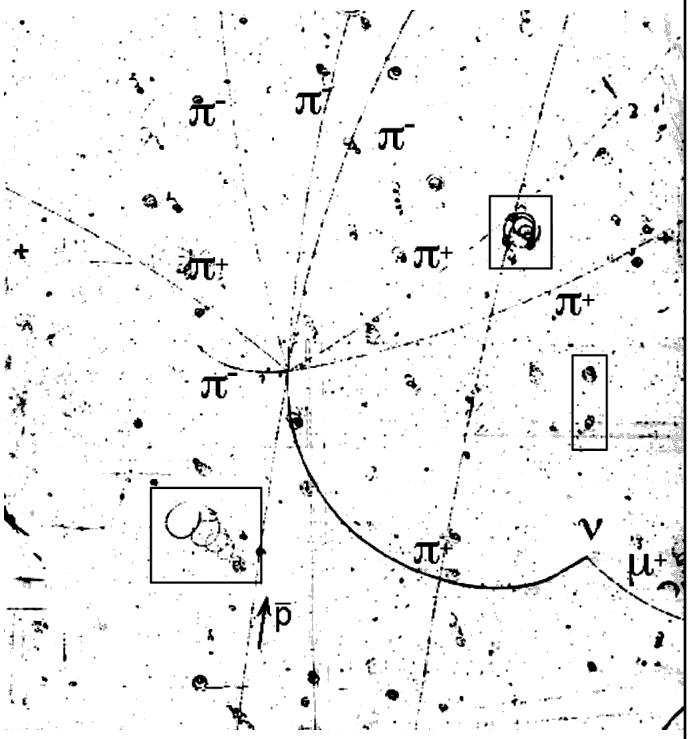
Dans une chambre à brouillard règne un champ magnétique uniforme et stationnaire de module B et parallèle à Oz (le champ électrique y est nul). Une réaction nucléaire en O crée une particule élémentaire de masse m et de charge q avec une vitesse initiale contenue par le choix des axes dans le plan xOy, de composante v_0 sur Ox et v_1 sur Oy. On rend compte des pertes énergétiques par rayonnement et interaction avec la matière grâce à une force phénoménologique de frottement fluide $-\lambda\overrightarrow{v}$.

1. Mettre en équation le mouvement de la particule et en déduire sa trajectoire. On pourra poser $\underline{\xi} = x + iy$.
2. Trouver le point asymptote où s'arrêtera la charge.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. Montrer que l'allure de la trajectoire dépend essentiellement de la quantité de mouvement initiale de la particule.

Dans une chambre à bulles le passage d'une particule chargée provoque la vaporisation d'un liquide placé dans une situation thermodynamique de retard à l'ébullition et la trajectoire de la particule est matérialisée par un chapelet de bulles. Sur la magnifique photographie ci-dessous, l'axe optique de l'appareil étant parallèle au champ magnétique, on observe le choc d'un anti-proton injecté dans la chambre sur un proton (noyau d'hydrogène) du liquide qu'elle contient et donc au repos. Il y a formation de huit pions, quatre positifs et quatre négatifs. On y observe aussi le mouvement de nombreux électrons dont quelques-uns ont été encadrés.

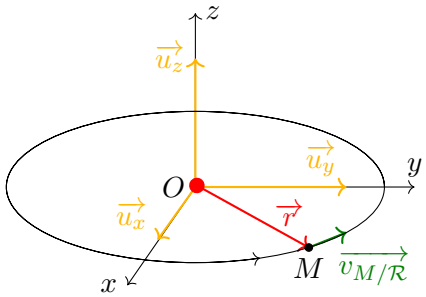


4. Analyser cette photo : la trajectoire des électrons, des pions…

EXERCICE 7 Effet Zeeman (⋆⋆)

On considère un atome dont le noyau est supposé fixe en O dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_{\text{lab}}$, galiléen. Le mouvement décrit par l'électron M (de masse m et de charge $-e$) décrit celui d'un oscillateur harmonique présentant une force de rappel de la forme $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$.

On plonge cet atome dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ stationnaire et homogène.



1. Écrire le système d'équations différentielles vérifiées par l'électron. On note $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre du système et $\omega_c = \frac{eB}{m}$ la pulsation cyclotron.
2. Montrer que le mouvement longitudinal (selon (Oz)) est celui d'un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre.
3. Préciser la nature du mouvement de l'électron observé dans le plan (Oxy). Préciser la pulsation de ce mouvement en notant $\omega_L = \frac{\omega_c}{2} \ll \omega_0$ la pulsation de *Larmor*.
4. En déduire les états de polarisation possibles de l'électron correspondant à deux solutions indépendantes de l'équation du mouvement.
5. Montrer que l'écart en longueur d'onde $\Delta\lambda$ entre les deux pulsations est donné par la formule :

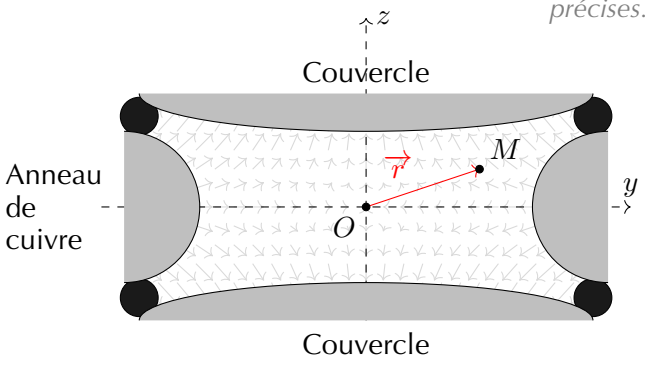
$$\Delta\lambda = \frac{eB\lambda^2}{2\pi mc}$$

La transition entre deux niveau d'énergie d'un cortège électronique se fait par quanta d'énergie $h\nu$ avec ν la fréquence de la radiation émise ou absorbée et h la constante de Planck.

6. Faire l'application numérique avec $B \simeq 1{,}0$ T, $e \simeq 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, $c \simeq 3{,}0 \times 10^{8}$ m·s^{-1}, $\lambda = 589$ nm. Préciser si l'écart spectral calculé est observable en salle de TP.

EXERCICE 8 Piège de Penning (⋆⋆⋆)

Dans les années 1970, le physicien H.G. Dehmelt a réussi à isoler un électron dans un « piège », appelé « piège de Penning », dont l'étude est proposée dans cet exercice. La conception de tels pièges à particules (ions ou électrons) de plus en plus performants permettait de réaliser des mesures de spectroscopie (comme la mesure du moment magnétique de l'électron par exemple) très précises.



Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Figure 3 – Piège de Penning

L'allure du piège de Penning est précisée sur la *Figure 3* ; O désigne le centre du piège et l'on choisit le repère galiléen $(Oxyz)$ défini sur la figure. Un électron placé au point M, de charge $-e$ et de masse m, a pour coordonnées (x, y, z). On note $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; pour les applications numériques, on donne $e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ C et $m \simeq 9,1 \times 10^{-31}$ kg.

1. À l'aide d'électrodes chargées de géométrie convenable, on réalise alors dans le piège un champ électrostatique quadripolaire dérivant du potentiel :

$$V(\overrightarrow{r}) = V(x, y, z) = \frac{V_0}{2d^2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$$

où $d > 0$ est une longueur caractéristique du système d'électrodes et $V_0 > 0$.

   a. Tracer les graphes de l'énergie potentielle $V(x, y, z)$ d'un électron dans ce champ électrostatique, d'une part dans le plan (Oxy) en fonction de ρ, et d'autre part sur l'axe (Oz) en fonction de z. Conclure sur les mouvements possibles de l'électron.

   b. Exprimer la force $\overrightarrow{F}$ à laquelle est soumis l'électron.

2. On appelle désormais mouvement longitudinal de l'électron la projection sur l'axe (Oz) de son mouvement et mouvement transverse la projection sur le plan (Oxy) du mouvement.

   a. Montrer que, dans le champ précédent, le mouvement longitudinal est périodique et déterminer sa pulsation ω_L. Calculer ω_L, la période T_L et la fréquence ν_L associées, pour $V_0 \simeq 10$ V et $d \simeq 4$ mm.

   b. Déterminer le mouvement transverse en utilisant de nouveau le paramètre ω_L. L'amplitude de ce mouvement est-elle bornée ?

3. On superpose au champ électrique quadripolaire un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ constant, uniforme et dirigé selon (Oz). On note $\omega_c = \frac{eB}{m}$ la pulsation cyclotron. Pour les applications numériques, on prendra $B \simeq 6$ T.

   a. Quelle est la nature du mouvement longitudinal ?

   b. Écrire les équations du mouvement transverse en utilisant les paramètres ω_L et ω_c. Introduire la fonction complexe du temps $\underline{X}(t) = x(t) + iy(t)$ et résoudre l'équation différentielle satisfaite par $\underline{X}(t)$. Montrer que le mouvement transverse est le composé de deux mouvements périodiques de pulsations ω_c' et ω_M (avec par convention $\omega_c' > \omega_M$) que l'on déterminera en fonction de ω_L et ω_c (on utilisera le fait que $\frac{\omega_L}{\omega_c} \ll 1$). Calculer numériquement ω_c' et ω_M et les comparer à ω_c et ω_L.

   c. Afin de déterminer l'allure de la trajectoire de l'électron dans le piège, on suppose que la particule était, à la date $t = 0$, immobile au point de coordonnées $A\,(a, 0, a)$, avec $a > 0$. Déterminer, en fonction du temps, les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de l'électron puis tracer l'allure de sa trajectoire.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 1 Spectrographe de Bainbridge (⋆)

1. Les électrons sont « attirés par les potentiels croissants ». Il faut donc que $\boxed{U \geq 0}$ pour accélérer les électrons.
2. Les ions étant chargés positivements, pour un champ magnétique sortant du plan de la feuille, ils sont déviés vers la droite. On a donc $\boxed{B \geq 0}$.
3. La distance séparant deux ions est AB. Le rayon de la trajectoire étant $R = \frac{v_0}{\omega_c}$. On a donc :

$$d = AB = 2(R_2 - R_1) = 2\left(\frac{41 m_p v_{0_1}}{eB} - \frac{39 m_p v_{0_2}}{eB}\right) = 2\frac{41 v_{0_1} - 39 v_{0_2}}{eB} m_p$$

La vitesse à laquelle est injectée l'ion dépend de sa masse. D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta\mathcal{E} = W(\overrightarrow{F}_{\text{élec}}) = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = eU \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

On a donc $v_{0_1} = \sqrt{\frac{2eU}{41 m_p}} \simeq 2,21 \times 10^5$ m · s^{-1} et $v_{0_2} = \sqrt{\frac{2eU}{39 m_p}} \simeq 2,26 \times 10^5$ m · s^{-1}.

On a donc :

$$\boxed{d = \frac{(41 v_{0_1} - 39 v_{0_2}) m_p}{eB} \simeq 4,46 \text{ cm}}$$

EXERCICE 2 Déviation d'électrons (⋆)

1. **a.** Les électrons subissent une force de la forme $\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{E} = e\overrightarrow{\text{grad}}(V)$. Pour accélérer le mouvement, il faut que la force soit motrice, donc $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \geq 0$. Comme $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ est dirigé selon $+\overrightarrow{u_x}$, il faut $\overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot \overrightarrow{u_x} \geq 0$, soit $V_E - V_C \geq 0$.

   b. En supposant que l'énergie cinétique initiale de l'électron est nulle, le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'électron s'écrit :

$$\Delta\mathcal{E}_c = W_{C\to E}(\overrightarrow{F}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = e\frac{V_E - V_C}{CE} \times CE = e(V_E - V_C) \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}}$$

2. Entre O et A, l'électron évolue dans un champ électrique stationnaire et homogène. L'équation horaire du mouvement peut être trouvée à l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{E}}{m}t^2 + \overrightarrow{v_0}t + \overrightarrow{0}$$

En $x = \ell$, on a donc $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_x} = \ell = v_0 t$, soit $t = \frac{\ell}{v_0}$. Par conséquent,

$$y_A = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_y} = \frac{\ell^2 E}{2v_0^2 m} = \frac{\ell^2 U}{2v_0^2 dm}$$

3. **a.** Entre A et B, l'électron est rigoureusement soumis à son poids. L'équation de la trajectoire est donc censée être une parabole (problème de balistique classique, sans frottements). Néanmoins, l'intensité de la force de pesanteur sur l'électron, de masse m infime, est très faible. La trajectoire est donc sensiblement celle d'une particule isolée : **rectiligne uniforme**.

   b. En A, l'électron part vers l'écran avec un angle $\varphi = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}})$ tel que :

$$\tan(\varphi) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{E\ell}{mv_0}}{v_0} = \frac{E\ell}{mv_0^2}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Le point d'impact à l'écran a donc pour ordonnée :

$$y_B = y_A + \left(D - \frac{\ell}{2}\right)\tan(\varphi) = \frac{\ell^2 U}{2v_0^2 dm} + \frac{2D-\ell}{2}\frac{U\ell}{dmv_0^2} \Rightarrow \boxed{y_B = \frac{D}{dmv_0^2}U}$$

La position verticale du point B à l'écran est donc bien **proportionnelle** à la valeur de U.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/