Propagation d'ondes

EXERCICE 1 Échelle de Perroquet (⋆⋆)

1. Chaque baguette de métal indicée « n » est soumise :
   - au couple de la baguette de métal indicée « $n+1$ » : $\overset{\hookrightarrow}{C}_{n+1} = +c\,(\theta_{n+1} - \theta_n)\ \overrightarrow{u_z}$.
   - au couple de la baguette de métal indicée « $n-1$ » : $\overset{\hookrightarrow}{C}_{n-1} = c\,(\theta_{n-1} - \theta_n)\ \overrightarrow{u_z}$.

   Le théorème du moment dynamique appliqué à la barre « n », de moment d'inertie J dont le mouvement est étudié dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ considéré comme galiléen, s'écrit donc :

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta_n}{\mathrm{d}t^2}(z,t) = +c\,(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n)$$

   Or, pour $a \ll \lambda$, on a :
   - $\theta_{n+1} \simeq \theta_n + a\frac{\partial\theta_n}{\partial z} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\theta_n}{\partial z^2}$
   - $\theta_{n-1} \simeq \theta_n - a\frac{\partial\theta_n}{\partial z} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\theta_n}{\partial z^2}$

   En sommant les deux équations ci-dessus, on obtient donc, à la limite des milieux continus ($a \ll \lambda$ - expression démontrée à la *question 2*) :

$$\frac{\partial^2\theta_n}{\partial t^2}(z,t) - \frac{ca^2}{J}\frac{\partial^2\theta_n}{\partial z^2}(x,t) = 0$$

   ☞ NB : On peut remarquer l'égalité $\frac{\partial^2\theta_n}{\partial t^2}(z,t) = \frac{\mathrm{d}^2\theta_n}{\mathrm{d}t^2}(z,t)$ qui résulte du fait que le barycentre de la tige de métal est fixe dans le référentiel d'étude du mouvement $\mathcal{R}_t$.

   On reconnaît une équation de propagation de d'Alembert, dont la vitesse de propagation est $\boxed{c_0 = a\sqrt{\frac{c}{J}}}$.

   ☞ NB : Il s'agit ici d'ondes transversales, appelées « ondes S » au lycée (pour « secondaires ») puisque leur vitesse de propagation est généralement inférieure à celles des « ondes P » (pour « premières »).
2. Pour justifier le passage à la limite du milieu continu, il faut que $\theta(z,t)$ varie « peu » à l'échelle du pas a, soit :

$$\left|\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right| \ll \left|a\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|$$

   En ordre de grandeur, cela revient à écrire que :

$$\frac{a^2\theta}{\lambda^2} \ll \frac{a\theta}{\lambda}$$

   soit $\boxed{a \ll \lambda}$.
3. On peut réexprimer la vitesse de propagation de l'onde :

$$\boxed{c_0 = a\sqrt{\frac{c}{J}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}}$$

   Par conséquent, la vitesse de propagation c_0 ne varie pas tant que le rapport $\frac{\kappa}{\mu}$ reste inchangé.
4. En remplaçant l'angle $\underline{\theta}(z,t)$ par son expression proposée dans le sujet, on obtient l'équation suivante :

$$(i\omega)^2\underline{\theta}(z,\omega) - c_0^2(-ik)^2\underline{\theta}(z,\omega) = 0$$

   soit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \Rightarrow \boxed{k = \pm\frac{\omega}{c_0}}$$

5. La vitesse de phase v_φ peut être exprimée à partir de sa définition :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c_0}$$

   Il s'agit de la vitesse de déplacement dans une direction donnée des surfaces ayant la même phase.
   De même, la vitesse de groupe v_g peut être exprimée à partir de sa définition :

$$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c_0}$$

   Il s'agit de la vitesse de déplacement du maximum d'amplitude de l'enveloppe d'un paquet d'ondes, qui serait en quelque sorte le « barycentre » du paquet d'onde, même si cette analogie reste très approximative...
   La vitesse de groupe étant égale à la vitesse de phase de l'onde, quelle que soit sa pulsation ω, il n'y a pas de dispersion du paquet d'ondes.

EXERCICE 2 Corde de Melde

1. La source E vibrante en $x = O$ impose une vibration est :

$$\boxed{y(0,t) = H\sin(\omega t + \varphi)}$$

   L'onde se propage dans la corde puis est réfléchie donnant ainsi naissance à des ondes stationnaires dont l'expression générale est :

$$y(x,t) = A\sin(\omega t + \phi)\sin(kx + \psi)$$

   Les conditions aux limites étant :
   - En $x = 0$: $y(x,t) = A\sin(\omega t + \phi)\sin(\psi) = H\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow A = \frac{H\sin(\omega t+\varphi)}{\sin(\omega t+\phi)\sin(\psi)}$.
   - En $x = \ell$: $y(\ell,t) = 0 = y(x,t) = A\sin(\omega t + \phi)\sin(k\ell + \psi)$.
     Cette expression étant nulle à tout instant t, cela impose $A\sin(k\ell + \psi)$, soit $k\ell + \psi = p\pi, p \in \mathbb{Z}$ (puisque $A \neq 0$).
     ☞ La condition aux limites fixe impose une **quantification du nombre d'onde** :

$$\boxed{k_p = \frac{p\pi - \psi}{\ell}}$$

   L'epression de $y(x,t)$ peut ainsi être déterminée :

$$\boxed{y(x,t) = H\frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\sin(k_p\ell - p\pi)} \times \sin\left(p\pi + k_p(x-\ell)\right) = \underbrace{H\frac{\sin\left(k_p(x-\ell)\right)}{\sin(k_p\ell)}}_{A(x)} \times \sin(\omega t + \varphi)}$$

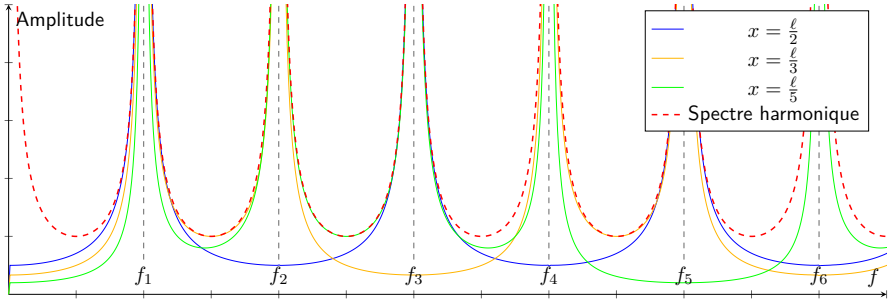
2. On observe ainsi que l'amplitude $A(x)$ a une valeur qui diverge en $k_p\ell = p \times \pi, p \in \mathbb{Z}$. On note ainsi f_p les fréquences propres, soit :

$$\boxed{f_p = \frac{k_p c}{2\pi} = \frac{pc}{2\ell}}$$

   On observe ainsi l'apparition de **noeuds de vibration**, lorsque $A(x) = 0$ et de **ventres de vibration** lors $A(x) = \pm A$ (amplitude extremale).

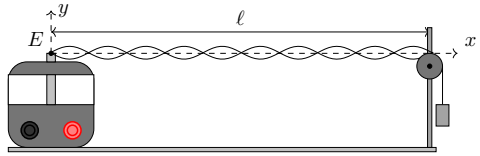
Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. L'amplitude aux trois points d'abscisse $x = \frac{\ell}{2}$, $x = \frac{\ell}{3}$ et $x = \frac{\ell}{5}$ est représentée ci-dessous :



4. Lorsqu'on étudie l'amplitude de vibration en une abscisse $x = \frac{\ell}{n}$, on observe que l'amplitude locale de vibration augmente à chaque fréquence propre, sauf aux harmoniques de rang n, $2 \times n$, etc. En effet, pour un harmonique de rang n les positions $x_{n,p} = p\frac{\ell}{n}, 0 \leq p \leq n$ sont des **noeuds de vibration de la corde** : l'amplitude de vibration est quasi-nulle.

   Ainsi, le même phénomène se produit lorsqu'on frappe une corde de piano en $x = \frac{\ell}{10}$: on impose un ventre de vibration à cet endroit.



   Le schéma ci-dessus aide à visualiser le mode de vibration n°10 sur une corde de Melde. L'harmonique de rang 10 présentant des noeuds de vibration tous les $x_{10,p} = p\frac{\ell}{10}$, il ne pourra être présent dans le spectre harmonique du signal émis.

   On peut donc retenir qu'une corde de piano frappée en $x = \frac{\ell}{n}, n \in \mathbb{N}$ ne présente pas d'harmoniques de rang $p \times n, (p, n) \in \mathbb{N}^2$ dans son spectre.

EXERCICE 3 Équation des télégraphistes (⋆)

1. La loi d'additivité des tensions s'écrit :

$$u(x,t) = \Lambda \mathrm{d}x \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) + u(x+\mathrm{d}x,t) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}}$$

   La loi des noeuds s'écrit :

$$i(x,t) = \Gamma \mathrm{d}x \frac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t) + i(x+\mathrm{d}x,t) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}}$$

   NB : $\frac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \mathrm{d}x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$. Dans les calculs, on néglige le terme d'ordre 1 en $\mathrm{d}x$.

2. Les équations vérifiées par u et i sont ainsi :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\Gamma\Lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{\Gamma\Lambda}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0}$$

   Il s'agit de deux équations de propagation de d'Alembert, de célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. L'intensité i du courant peut être déterminée par la première équation couplée :

$$-\Lambda j\omega \underline{i} = -jk\underline{u}$$

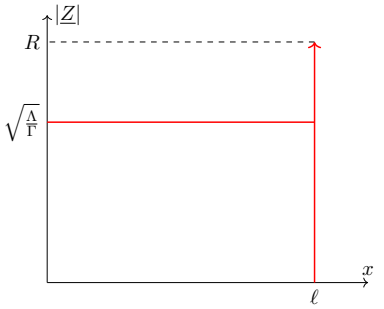
   soit :

$$\underline{i} = \frac{k}{\Lambda\omega}\underline{u} = \frac{1}{\Lambda c}\underline{u} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\underline{u}$$

   On note ainsi $\underline{Z} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ l'impédance du câble. On en déduit donc que :

$$\boxed{i(x,t) = \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{\underline{Z}} U_0 e^{j(\omega t - kx)}\right) = U_0\sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}\cos(\omega t - kx)}$$

4. L'impédance « vue » par l'onde au cours de sa propagation est représentée ci-dessous :



   Si les deux impédances ne sont par identiques, soit $\boxed{R = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}}$, l'onde subira un changement de milieu en $x = \ell$ et sera partiellement réfléchie, donnant naissance à des ondes stationnaires dans le câble.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/