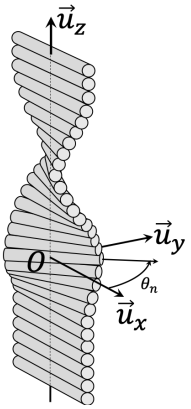
Propagation d'ondes

EXERCICE 1 Échelle de Perroquet (⋆⋆)

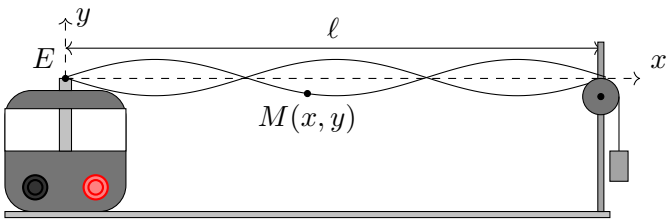
On considère l'échelle de Perroquet représentée ci-contre. N baguettes de métal, de moment d'inertie J sur l'axe $(O,\ \vec{u_z})$ sont reliées entre-elles par un ressort de torsion de raideur $+c$. On considère une baguette, indicée n, à la position $z_n = n \times a$ faisant un angle $\theta_n(t) = \theta(na, t)$ par rapport à sa position au repos. On se placera dans le cas de déformation telle que le développement de cette fonction, dans le passage de l'abscisse na à l'abscisse $na \pm a$, peut être limité au second ordre relativement au pas a.



1. Établir alors que, dans cette limite du milieu continu, la fonction $\theta(z,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(z,t) - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}(z,t) = 0$$
avec c_0 que l'on exprimera et dont on donnera une interprétation physique.
2. Pour un pas a fixé, préciser à quelle condition le passage à la limite du milieu continu demeure valide. Cette condition implique le pas a ainsi que deux dérivées spatiales de la fonction $\theta(z,t)$.
3. Nous posons $\mu \hat{=} \frac{J}{a}$ et $\kappa \hat{=} ca$. Exprimer alors c_0 en fonction de κ et μ.
4. Justifier que c_0 reste inchangée si l'on modifie a tout en maintenant le rapport $\frac{\kappa}{\mu}$ fixé.
5. On cherche une solution de la forme :
$$\underline{\theta}(z,\omega) = \theta_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$$
Donner la relation de dispersion impliquant $\underline{k}$.
6. Exprimer les vitesse de phase v_φ et vitesse de groupe v_g en fonction de c_0. Expliquer leur signification.

EXERCICE 2 Corde de Melde

On considère le dispositif de la corde de Melde étirée entre deux points d'appui distants de ℓ. Le vibreur, sur la gauche, impose une excitation $y(0,t) = H\sin(\omega t)$.



1. Démontrer que la vibration de la corde est décrite par la fonction :
$$y(x,t) = -H\frac{\sin(k_n(x-\ell))}{\sin(k_n\ell)} \times \sin(\omega t)$$
2. Déterminer l'expression des fréquences f_p de résonance à partir de la célérité c des ondes et la longueur ℓ de la corde.
3. Tracer l'amplitude $A(x) = H\frac{\sin(k_n(x-\ell))}{\sin(k_n\ell)}$ pour $x = \frac{\ell}{2}$, $x = \frac{\ell}{3}$ et $x = \frac{\ell}{5}$ en fonction de la fréquence f d'excitation de la corde.
4. Comment peut-on prévoir, à l'aide du spectre de $A(x)$, la composition spectrale d'une corde de piano frappée en $x = \frac{\ell}{10}$? Identifier la propriété du son émis variant avec la position où la corde est frappée ?

EXERCICE 3 Équation des télégraphistes (⋆)

On modélise une longueur $\mathrm{d}x$ d'une ligne électrique coaxiale par le schéma de la *Figure 1*. On considère l'élément de la ligne étudiée dans l'A.R.Q.S.

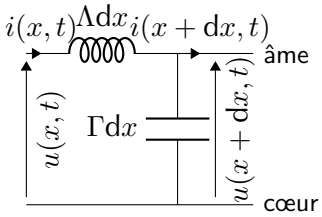


Fig 1. Câble coaxial infinitésimal

1. Établir les équations aux dérivées partielles reliant $u(x,t)$ et $i(x,t)$.
2. En déduire les équations vérifiées par $i(x,t)$ d'une part et $u(x,t)$ d'autre part.
3. On considère une solution progressive harmonique selon les x croissants $\underline{u}(k,\omega) = U_0 \times e^{j(\omega t - kx)}$ avec $u(x,t) = \mathfrak{Re}\left(\underline{u}(k,\omega)\right)$. Déterminer l'expression de $i(x,t)$.
4. La ligne s'étend de $x = 0$ à $x = \ell$. On referme en $x = \ell$ la ligne grâce à une résistance R. Déterminer l'expression de R permettant l'existence dans la ligne de la solution proposée à la question précédente.