Moment cinétique

EXERCICE 5 Pendule à deux longueurs (⋆)

1. D'après la deuxième loi de NEWTON appliquée au mobile dont la trajectoire est étudiée dans le référentiel $\mathcal{R}$,

$$m \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{f}$$

   - Si $\vec{v}$ n'est pas continu dans le temps, il existe des instants où $\vec{f}$ est infini, ce qui est impossible pour un vecteur force.
   - Si $\vec{v}$ n'est pas continu dans l'espace, il existe des zones de l'espace où $\vec{f}$ ne varie pas continûment. C'est possible : cela permettra de délimiter une interface/une zone de l'espace.

   Par conséquent, le module du vecteur vitesse (la vitesse) est une fonction continue du temps.

2. La masselotte M du pendule est soumise à :
   - la tension $\vec{T}$ du fil, de moment nul en O.
   - son poids $\vec{P} = mg\,\vec{u_x}$, de moment en O : $\vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{P}\right) = -m\ell g\sin(\theta)\,\vec{u_z}$.

   Le théorème du moment cinétique permet donc d'établir que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_O(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{T}\right) + \vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{P}\right) \Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} = -m\ell g\sin(\theta)$$

   d'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0}$$

3. Dans l'hypothèse des petites oscillations, l'équation différentielle est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

   Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.
   La durée δt_1 de la première phase du mouvement est donc un quart de période, soit :

$$\boxed{\delta t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

4. Le mobile M est soumis au poids (force conservative) et à la tension du fil (qui ne travaille pas puisque orthogonale à la trajectoire). Le théorème de l'énergie mécanique, appliqué à M dans le référentiel terrestre s'écrit donc $\mathcal{R}$:

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W(\vec{F}_{\mathrm{NC}}) = 0$$

   L'énergie mécanique du mobile se conserve.

   Initialement, l'énergie potentielle est $\mathcal{E}_p(0) = mg\ell(1 - \cos(\theta_0))$. L'énergie cinétique initiale étant nulle. Lorsque $\theta = 0$, on a donc :

$$mg\ell(1-\cos(\theta_0)) + 0 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2g\ell(1-\cos(\theta_0))}}$$

On peut donc en déduire :

$$\boxed{\omega_1^- = \frac{v}{\ell} = \sqrt{\frac{2g(1-\cos(\theta_0))}{\ell}}}$$

5. La vitesse étant une fonction continue du temps, on en déduit que $v_1^+ = v_1^-$, soit $\boxed{\omega_1^+ = \frac{3}{2}\omega_1^-}$.

6. En se basant sur les résultats précédents, on en déduit que :

$$\boxed{\delta t_2 = \frac{T_2}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}}$$

7. L'énergie étant conservée entre la phase 1 et la phase 2 du mouvement, on peut écrire :

$$mg\frac{2\ell}{3}(1-\cos(\theta_2)) + 0 = \frac{1}{2}mv^2 = mg\ell(1-\cos(\theta_0)) + 0$$

soit :

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cos(\theta_2) = 1 - \cos(\theta_0) \Rightarrow \boxed{\theta_2 = \arccos\left(\frac{3\cos(\theta_0)-1}{2}\right)}$$

8. Le pendule effectue le mouvement retour de façon totalement réversible avec le mouvement aller (conservation de l'énergie initiale). Sa période T est :

$$\boxed{T = 2\delta t_1 + 2\delta t_2 = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} + \pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}} = \pi\sqrt{\frac{5\ell}{3g}}}$$

9. Le portrait de phase du pendule est représenté en *Figure 1* :

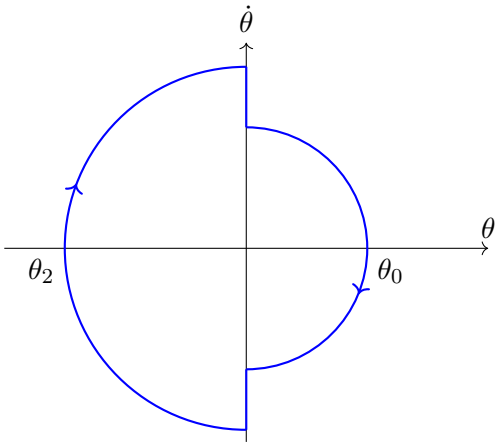


Fig 1. Portrait de phase.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 6 Ressort tournant (⋆)

1 Le mobile autoporteur M est soumis à :

- son poids $\overrightarrow{P} = -mg\ \overrightarrow{u_z}$ de moment en O : $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\overrightarrow{P}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = rmg\ \overrightarrow{u_\theta}$.
- la réaction normale du support $\overrightarrow{N} = N\ \overrightarrow{u_z}$ (en l'absence de frottement) de moment en O : $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\overrightarrow{N}\right) = -rN\ \overrightarrow{u_\theta}$.
- la force de rappel élastique du ressort : $\overrightarrow{F} = -k(r-\ell_0)\ \overrightarrow{u_r}$, de moment en O nul puisque O est sur la droite support de $\overrightarrow{F}$.

Le théorème du moment cinétique appliqué au mobile autoporteur M étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}_O(M)}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\overrightarrow{P}\right) + \overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\overrightarrow{N}\right) + \overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\overrightarrow{F}\right) = r(mg-N)\ \overrightarrow{u_\theta}$$

Par conséquent, si la réaction normale du support compense le poids ($N = mg$), le moment cinétique de M par rapport à O se conserve.

2 a. Le moment cinétique de M par rapport à O est :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_O(M)} = \overrightarrow{OM} \wedge (m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}) = \overrightarrow{0}$$

Les vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ étant colinéaires.

b. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen s'écrit :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}$$

soit :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-mg\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\N\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-k(r-\ell_0)\\0\\0\end{pmatrix}$$

Si le poids mg compense la réaction normale du support N, l'équation de la trajectoire dans la direction $\overrightarrow{u_z}$ se traduit par $\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = \text{cte}$. Le dispositif est susceptible de translater à vitesse uniforme dans la direction $\overrightarrow{u_z}$. Il suffit de choisir ce référentiel galiléen comme référentiel d'étude pour conserver $z = 0$.

Dans la direction $\overrightarrow{u_r}$, on obtient :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{m}r + \frac{k}{m}\ell_0$$

Le moment cinétique de M étant initialement nul et se conservant, on peut poser $\dot{\theta} = 0$, soit :

$$\boxed{\ddot{r} + \frac{k}{m}r = \frac{k}{m}\ell_0}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\ \overrightarrow{u_r} = 0,2\ell_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \ell_0}$$

Cette position évolue entre $0,8\ell_0$ et $1,2\ell_0$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3 a. Le moment cinétique du mobile autoporteur est :

$$\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge (m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}) = mr^2\dot{\theta}\ \overrightarrow{u_z} = m\ell_1^2\omega\ \overrightarrow{u_z}$$

Le poids et la force de rappel du ressort sont des forces conservatives. Le travail élémentaire de la réaction normale du support est $\delta W(\overrightarrow{N}) = 0$ puisque $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{N} = \overrightarrow{0}$.
Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à M dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen s'écrit ainsi :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W(\overrightarrow{N}) = 0$$

Il y a donc bien conservation de l'énergie mécanique du mobile autoporteur.

b. L'énergie potentielle élastique du mobile autoporteur est de la forme $\mathcal{E}_{p_{\text{élas}}} = \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 + \text{cte}$. Son énergie mécanique a donc pour expression :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 + \text{cte}$$

Le moment cinétique de M par rapport à O se conserve (il faut pour cela appliquer le théorème du moment cinétique à M en O) et vaut $L = m\ell_1^2\omega = mr^2\dot{\theta}$. On obtient ainsi :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 + \text{cte}}_{\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}}$$

c. Le graphe de $\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}(r)$ est tracé en *Figure 2* :

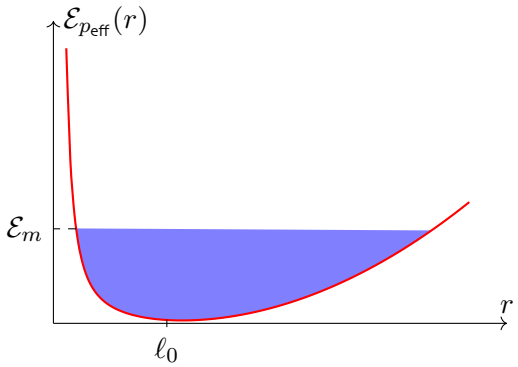
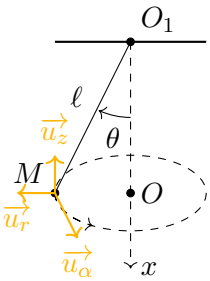


Fig 2. Courbe d'énergie potentielle effective.

On remarque que quelle que soit l'énergie mécanique initiale du mobile autoporteur, il se trouve dans un état lié. Le mobile oscillera donc autour de sa position d'équilibre : le minimum du puits de potentiel.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 7 Le pendule conique (⋆)



1. La masselotte M est soumise à :
   - la tension du fil $\overrightarrow{T}$ dirigée de M vers O_1
   - son poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$.

   Il est intéressant d'appliquer le théorème du moment cinétique à M en O_1 pour éliminer le moment de $\overrightarrow{T}$ dont l'expression est inconnue. On obtient ainsi, dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\alpha}, \overrightarrow{u_z})$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\begin{pmatrix}\ell\sin(\theta)\\0\\-\ell\cos(\theta)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\m\ell\sin(\theta)\omega\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\ell\sin(\theta)\\0\\-\ell\cos(\theta)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\-mg\end{pmatrix}$$

   soit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}m\ell^2\omega\sin(\theta)\cos(\theta)\\0\\m\ell^2\sin^2(\theta)\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\m\ell g\sin(\theta)\\0\end{pmatrix}\Rightarrow m\ell^2\omega\sin(\theta)\cos(\theta)\times\omega\overrightarrow{u_\alpha}=m\ell g\sin(\theta)\overrightarrow{u_\alpha}$$

   d'où :

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell\cos(\theta)}}}$$

2. La période de rotation est ainsi :

$$T=\frac{2\pi\ell\sin(\theta)}{v}=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos(\theta)}{g}}$$

3. Le fil MO_2 est tendu s'il existe une tension du fil en M dirigée de M vers O_2. On est libre, dans cette situation, d'appliquer à M le théorème du moment cinétique en trois points fixes :
   - En O_2 : mais dans ce cas on se prive de l'expression de $\overrightarrow{T_2}$ puisque $\overrightarrow{O_2M}\wedge\overrightarrow{T_2}=\overrightarrow{0}$.
   - En O : on obtient ainsi une relation entre $\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2}$ et le poids. Cependant, l'expression de T_1 reste inconnue.
   - En O_1 : de cette manière on s'affranchit de l'expression de $\overrightarrow{T_1}$ tout en faisant apparaître une relation entre le poids et $\overrightarrow{T_2}$.

   On applique donc le théorème du moment cinétique à M en O_1, dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\alpha}, \overrightarrow{u_z})$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\begin{pmatrix}\ell\sin(\theta)\\0\\-\ell\cos(\theta)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\m\ell\sin(\theta)\omega\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\ell\sin(\theta)\\0\\-\ell\cos(\theta)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-T_2\sin(\theta)\\0\\-mg-T_2\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

   soit :

$$m\ell^2\omega'^2\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{u_\alpha}=\ell T_2\cos(\theta)\sin(\theta)+\ell\sin(\theta)(mg+T_2\cos(\theta))\overrightarrow{u_\alpha}$$

   On en déduit donc que si $T_2 = 0$ N (la corde n'est plus tendue à partir du moment où T_2 s'annule), on a :

$$\boxed{\omega'=\sqrt{\frac{g}{\ell\cos(\theta)}}}$$

4. Pour une vitesse de rotation $\omega \geq \omega'$, la relation précédente reste valide, soit :

$$2T_2\ell\sin(\theta)\cos(\theta)=-mg\ell\sin(\theta)+m\ell^2\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

d'où :

$$\boxed{T_2 = \frac{m\ell}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{\ell\cos(\theta)}\right) = m\ell\frac{\omega^2 - \omega'^2}{2}}$$

Verticalement, l'équilibre des forces se traduit par la relation suivante :

$$(T_1 - T_2)\cos(\theta) = mg$$

d'où :

$$\boxed{T_1 = T_2 + \frac{mg\ell}{\ell\cos(\theta)} = T_2 + m\ell\omega'^2 = m\ell\frac{\omega^2 + \omega'^2}{2}}$$

5. On calcule $\omega' = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos(\theta)}} = \sqrt{\frac{g}{\ell\frac{a}{\ell}}} \simeq 5,0$ rad $\cdot$ s^{-1}, ce qui fait :

$$\boxed{T_1 \simeq 36 \text{ N}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_2 \simeq 7,0 \text{ N}} \quad \text{avec} \quad mg \simeq 20 \text{ N}$$

EXERCICE 8 L'expérience de Cavendish (⋆)

1. Le fil de torsion crée un moment $\overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_z = -C\theta\,\vec{u_z}$ au niveau de l'axe de rotation.

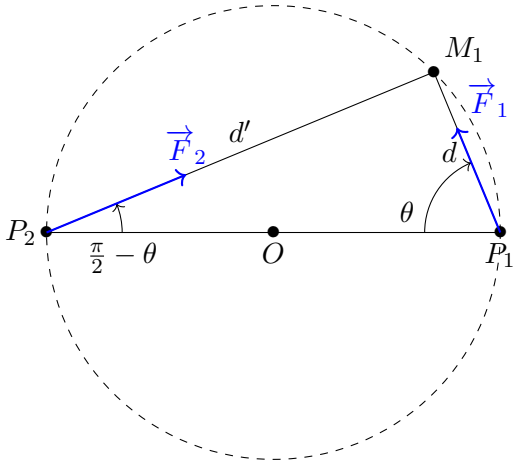


Fig 3. Vue du dessus de l'expérience de CAVENDISH.

On considère la configuration suivante constituée des deux masselottes de platine P_1 et P_2 soumises à l'attraction gravitationnelle de la sphère M_1.

La configuration d'équilibre consiste donc à équilibrer tous les moments des forces en O.

- La force $\vec{F}_1$ exerce en O un moment :

$$\overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\vec{F_1}\right) = \overrightarrow{OP_1} \wedge \vec{F_1} = \ell\frac{\mathcal{G}mM}{d^2}\sin(\theta)\,\vec{u_z}$$

soit :

$$\boxed{\overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\vec{F_1}\right) = \ell\frac{\mathcal{G}mM}{d^2}\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2\ell}\right)^2}\,\vec{u_z}}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

- La force $\overrightarrow{F_2}$ exerce en O un moment :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F_2}\right) = \overrightarrow{OP_2} \wedge \overrightarrow{F_2} = -\ell \frac{\mathcal{G}mM}{d'^2} \cos(\theta)\ \overrightarrow{u_z}$$

soit :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F_2}\right) = -\ell \frac{\mathcal{G}mM}{4\ell^2 - d^2} \frac{d}{2\ell}\ \overrightarrow{u_z}}$$

Pour la seconde boule de plomb, le calcul est identique (car la configuration est symétrique). Le moment total des forces de gravitation s'exerçant sur les deux masselottes de platine est donc $2\left(\overrightarrow{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F_2}\right)\right)$. Ce moment équilibre le moment de rappel du ressort de torsion, soit :

$$\boxed{C\alpha = 2\ell\mathcal{G}mM\left(\frac{1}{d^2}\sqrt{1-\left(\frac{d}{2\ell}\right)^2} - \frac{d}{2\ell(4\ell^2-d^2)}\right)}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{G} = \frac{C\alpha}{2\ell mM\left(\frac{1}{d^2}\sqrt{1-\left(\frac{d}{2\ell}\right)^2} - \frac{d}{2\ell(4\ell^2-d^2)}\right)}}$$

2. Entre les deux positions extrêmes le fléau a tourné de 2α, et le rayon lumineux a tourné de 4α d'où : $\tan(2\alpha) \simeq 2\alpha \simeq \frac{5{,}5}{2\times 500}$, soit :

$$\boxed{\alpha \simeq 0{,}0275 \text{ rad}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{G} \simeq 6{,}55 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Le programme Python de la *Figure 4* se base sur la méthode de Monte Carlo pour évaluer l'incertitude de mesure $\Delta\mathcal{G}$.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

def G(C,al,m,M,d,l) :
    return C*al/(2*l*m*M*(1/d**2*np.sqrt(1-(d/2/l)**2)-d/2/l/(4*l**2-d**2)))

v=[]
for i in range(100000) :
    m,M,l,d,C= rd.uniform(49.999,50.001)*1e-3, rd.uniform(29.999,30.001),
rd.uniform(9.95,10.05)*1e-2, rd.uniform(9.9,10.1)*1e-2, rd.uniform(4.95,5.05)*1e-7
    L,H=rd.uniform(4.999,5.001), rd.uniform(5.45,5.55)*1e-2
    al=H/4/L
    v.append(G(C,al,m,M,d,l))

print(f"G = ({np.mean(v)*1e11}±{np.std(v)*1e11,3})e-11 USI")
```

```
>>> G = (6.555±0.141)e-11 USI
```

Fig 4. Méthode de Monte Carlo et estimation de la constante de CAVENDISH.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. La question revient à considérer $\overrightarrow{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F_1}\right)$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F_2}\right)$ pour déterminer si l'un des deux termes est négligeable par rapport à l'autre.

   Après calcul, on obtient :

$$\left\|\overrightarrow{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F_1}\right)\right\| = 8,52 \times 10^{-10} \text{ Nm} \quad \text{et} \quad \left\|\overrightarrow{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F_2}\right)\right\| = 1,64 \times 10^{-10} \text{ Nm}$$

   Il n'est donc pas possible de négliger un terme devant l'autre sans commettre une approximation bien plus élevée que les incertitudes relatives de mesure de chaque grandeur.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/