Induction

(Convertisseurs électromécaniques)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Génératrice synchrone (⋆)

1. La force électromotrice créée dans le bobinage a pour expression, conformément à la loi de Lenz-Faraday :

$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(NSB\cos(\omega t)\right) = NSB\omega\sin(\omega t)}$$

Le générateur est donc synchrone puisque la pulsation du système électrique est celle de la rotation relative du champ $\overset{\hookrightarrow}{B}$. Le circuit électrique se comportant comme un générateur, il faut une énergie mécanique permettant de faire tourner le champ magnétique. La spire cherchera ainsi à s'aligner sur le champ magnétique.

2. D'après la loi des mailles (en négligeant l'autoinduction du circuit), on établit que :

$$e - Ri = 0$$

On en déduit donc que : $i(t) = \frac{NSB\omega}{R}\sin(\omega t)$. Le moment des forces de Laplace vaut donc :

$$\overset{\hookrightarrow}{\Gamma} = \overrightarrow{\mu} \wedge \overset{\hookrightarrow}{B} = Ni(t)\overset{\hookrightarrow}{S} \wedge \overset{\hookrightarrow}{B} = -\frac{(NBS)^2}{R}\omega\sin^2(\omega t)\,\overrightarrow{u_z}$$

La puissance mécanique vaut ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}_M = \overset{\hookrightarrow}{\Gamma}.\overrightarrow{\omega} = -\frac{(NBS\omega)^2}{R}\sin^2(\omega t) = -e \times i}$$

La puissance mécanique ressentie est lissée par l'inertie des parties métalliques en mouvement. La puissance des forces de Laplace est donc ressentie comme constante.

3. La puissance électrique reçue par R vaut :

$$\boxed{\mathcal{P}_R = Ri^2 = \frac{(NBS\omega)^2}{R}\sin^2(\omega t) = -\mathcal{P}_M}$$

On vérifie donc bien le **couplage électromagnétique parfait**.

L'essentiel

EXERCICE 2 Moteur à courant continu (⋆)

1. La force de Laplace a pour expression dans chaque tige :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_L = \int_{z=0}^{z=h} i\mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z} \wedge (B\,\overrightarrow{u_r}) = iBh\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

2. Le moment de cette force est ainsi :

$$\boxed{\overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F}_L\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = iBhr}$$

Comme il y a N fils parcourus par un courant d'intensité i, le couple moteur total est :

$$\boxed{C_m = NiBhr}$$

3. La puissance du moteur est :

$$\boxed{\mathcal{P} = 2\pi nC_m = 2\pi nNiBhr}$$

4. Numériquement, on obtient :

$$\boxed{C_m \simeq 80\ \text{Nm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{P} \simeq 15\ \text{kW}}$$

EXERCICE 3 Principe de l'alternateur (⋆)

1. D'après la loi de Faraday, la fem induite a pour expression :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \overset{\hookrightarrow}{B}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(BS\sin(\omega t)\right) = -BS\omega\cos(\omega t)$$

Le sens du courant dans la spire est le sens algébriquement positif, c'est-à-dire le sens qui a servi à preienter $\overset{\hookrightarrow}{S}$. Le circuit électrocinétique équivalent est représenté en *Figure 1*.

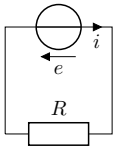


Fig 1. Circuit électrocinétique équivalent à la spire.

Si le circuit est résistif, on a ainsi :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{BS\omega}{R}\cos(\omega t)$$

2. La loi de Modération de Lenz est énoncée comme suit : « Les phénomènes d'induction s'opposent par leurs effets aux causes qui leur ont donné naissance »
   - La cause du mouvement de la spire est une variation de flux du champ magnétique du fait de la rotation de la spire.
   - La conséquence est la création d'un courant induit d'intensité i engendrant un couple sur la spire de la forme $\overrightarrow{\mathcal{C}} = i\overset{\hookrightarrow}{S} \wedge \overset{\hookrightarrow}{B} = -\frac{B^2S^2\omega}{R}\cos^2(\omega t)$.

   Si $\omega > 0$, on voit que $\mathcal{C} = \overrightarrow{\mathcal{C}} \cdot \overrightarrow{u_z} < 0$ (et inversement). Le couple induit s'oppose donc à la rotation de la spire.
3. La représentation de $e(t)$ est en *Figure 2*.

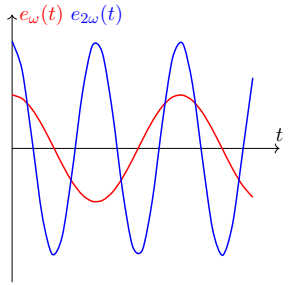


Fig 2. Force électromotrice induite.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

4. Si la bobine est constituée de N spires en série, la force électromotrice la parcourant est :

$$\boxed{e(t) = -NSB\omega\cos(\omega t)}$$

EXERCICE 4 Propulseur électromagnétique (**)

1. Le courant électrique traversant le conducteur plongé dans un champ magnétique est soumis à une force de LAPLACE qui met en mouvement le barreau.
2. D'après la loi de LENZ-FARADAY, la force électromotrice a pour expression :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}L(x)i}{\mathrm{d}t}$$

3. En multipliant par $i(t)$ l'équation précédente, on a :

$$e(t)i(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L(x)i^2\right)$$

4. On peut réécrire l'expression précédente sous la forme suivante :

$$e(t)i(t) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}i^2\dot{x} + \frac{1}{2}L(x)\frac{\mathrm{d}i^2}{\mathrm{d}t^2}$$

On peut ainsi identifier $\overrightarrow{F} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}i^2\ \overrightarrow{u_x}$ à une force, de sorte que $\mathcal{P}_{\text{méca}} = F\dot{x}$.

5. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \mathcal{P}_{\text{méca}}$$

soit :

$$\frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}i^2D$$

d'où :

$$\boxed{i = \sqrt{\frac{mv_p^2}{D\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}}} \simeq 790,6\text{ kA}}$$

Ce courant est difficilement atteignable...une prise électrique standard délivrant 16 A à 32 A.

Pour aller plus loin

EXERCICE 5 Moteur asynchrone (**)

1. En utilisant les notations complexes pour les vecteurs, on a :

$$\overrightarrow{u}_0 = e^{j0} = 1\ ;\ \overrightarrow{u}_1 = e^{j2\pi/3}\ ;\ \overrightarrow{u}_2 = e^{j4\pi/3}$$

Le champ magnétique $\underset{\hookrightarrow}{B}$ vaut alors :

$$\underset{\hookrightarrow}{B}(O) = \frac{2}{3}B\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \times 1 + \frac{e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})} - e^{-j(\omega t - \frac{2\pi}{3})}}{2j} \times e^{j\frac{2\pi}{3}} + \frac{e^{j(\omega t - \frac{4\pi}{3})} - e^{-j(\omega t - \frac{4\pi}{3})}}{2j} \times e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

Après simplification $(1 + e^{-\frac{2j\pi}{3}} + e^{-\frac{4j\pi}{3}} = 0)$, l'équation devient :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\underset{\hookrightarrow}{B}(O) = Be^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

Le champ est donc tournant à la vitesse de rotation ω.

2. Le flux du champ magnétique passant dans la bobine est variable. Il a pour effet de créer des courants induits et dont les effets (forces de LAPLACE) s'opposent à leur cause. La spire est donc mise en rotation à la vitesse de rotation $\underset{\hookrightarrow}{\omega^*} = \omega^*(t)\ \overrightarrow{u_z}$.
3. Le flux du champ magnétique est :

$$\Phi = \iint \underset{\hookrightarrow}{B}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = NBS\cos((\omega - \omega^*)t + \alpha)$$

Le flux du champ magnétique est $NBS\cos(\Omega t + \alpha)$, avec $\Omega = \omega - \omega^*$. La force électromotrice résultante s'écrit alors :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = NBS\Omega\sin(\Omega t + \alpha)$$

Le schéma équivalent du circuit électrique est donc celui d'un circuit RL série. La loi des mailles s'écrit :

$$e = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Soit, en notation complexe :

$$\underline{e} = R\underline{i} + jL\Omega\underline{i} \Rightarrow NBS\Omega e^{j\alpha} = \underline{I}(R + jL\Omega)$$

On en déduit donc que l'expression temporelle de l'intensité traversant le circuit est :

$$i(t) = |\underline{I}|\sin(\Omega t + \alpha - \arg(R + jL\Omega))$$

soit :

$$i(t) = \frac{NBS\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}\sin\left(\Omega t + \alpha - \arctan\left(\frac{L\Omega}{R}\right)\right)$$

Le moteur est asynchrone : si la vitesse de rotation du rotor rattrape celle du champ magnétique, alors $\Omega \to 0$, ce qui entraine $i \to 0$: la spire ralentit.

4. Le couple résultant est $\overrightarrow{C} = \underset{\hookrightarrow}{\mu} \wedge \underset{\hookrightarrow}{B} = Ni(t)\underset{\hookrightarrow}{S} \wedge \underset{\hookrightarrow}{B}$, soit :

$$\overrightarrow{C} = \frac{N^2B^2S^2\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}\sin\left(\Omega t + \alpha - \arctan\left(\frac{L\Omega}{R}\right)\right) \times \sin(\Omega t + \alpha)\ \overrightarrow{u_z}$$

La valeur moyenne de ce vecteur est donc :

$$\left\langle\overrightarrow{C}\right\rangle = \frac{N^2B^2S^2\Omega}{2\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}\cos\left(\arctan\left(\frac{L\Omega}{R}\right)\right)\ \overrightarrow{u_z} = \frac{N^2B^2S^2R\Omega}{2(R^2 + L^2\Omega^2)}\ \overrightarrow{u_z}$$

5. En exprimant cette valeur à l'aide du facteur de glissement $g = \frac{\omega - \omega^*}{\omega} = \frac{\Omega}{\omega}$, on obtient :

$$\left\langle\overrightarrow{C}\right\rangle = \frac{N^2B^2S^2gQ}{2L(1 + g^2Q^2)}\ \overrightarrow{u_z} = C_0\frac{gQ}{1 + g^2Q^2}\ \overrightarrow{u_z}$$

Pour les valeurs de glissement extrémales, on a :

- Pour $g = 1$: $\left\langle\overrightarrow{C}\right\rangle = C_0\frac{Q}{1+Q^2}\ \overrightarrow{u_z} \simeq \frac{C_0}{Q}\ \overrightarrow{u_z}$ avec $Q \gg 1$ (dipôle inductif à faible résistance).
- Pour $g = 0$: $\left\langle\overrightarrow{C}\right\rangle = 0$, le moteur décroche lorsque la vitesse de rotation de la bobine rattrape celle du champ.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

La valeur maximale est obtenue lorsque la dérivée s'annule soit :

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}g} = 0 = C_0 Q \frac{1-Q^2g^2}{(1+Q^2g^2)^2} \Rightarrow \boxed{g \,\hat{=}\, g_M \,\hat{=}\, \frac{1}{Q}}$$

Le couple maximal est donc $C_M = \frac{N^2B^2S^2}{4L} = \frac{C_0}{2}$. La puissance est donnée par l'expression : $\mathcal{P} = C\omega^*$, soit :

$$\mathcal{P} = C\omega(1-g) = C_0\omega Q \frac{g(1-g)}{1+Q^2g^2}$$

6. Par la même méthode, en dérivant la puissance par rapport au facteur de glissement, on trouve :

$$\mathcal{P}_M \simeq C_M\omega\left(1-\frac{1}{Q}\right) \simeq C_M\omega$$

EXERCICE 6 Stabilité d'un alternateur (⋆⋆)

1. Le théorème du moment cinétique appliqué au rotor du moteur s'écrit :

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \Gamma_0 \sin(\omega t - \theta(t)) + \Gamma_c$$

Lorsque le synchronisme est vérifié, soit $\theta(t) = \omega t - \alpha$, soit :

$$\boxed{\Gamma_{c,0} = -\Gamma_0 \sin(\alpha)}$$

2. En remplaçant les différentes expressions dans l'équation de la dynamique, on a :

$$J\frac{\mathrm{d}^2(\omega(1+\varepsilon)t-\alpha)}{\mathrm{d}t^2} = \Gamma_0 \sin(\omega t - (\omega(1+\varepsilon)t-\alpha)) + \Gamma_{c,0} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}\Gamma_c}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)$$

soit :

$$2J\omega\dot{\varepsilon} = \Gamma_0 \sin(\alpha - \omega\varepsilon t) + \Gamma_{c,0} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}\Gamma_c}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)$$

En soustrayant l'équation d'équilibre, on obtient ainsi :

$$2J\omega\dot{\varepsilon} = \Gamma_0\left(\sin(\alpha-\omega\varepsilon t) - \sin(\alpha)\right) + \varepsilon\frac{\mathrm{d}\Gamma_c}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)$$

Or, $\sin(\alpha-\omega\varepsilon t) - \sin(\alpha) = -2\cos\left(\alpha - \frac{\omega\varepsilon}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}t\right) \simeq -\omega\varepsilon t\cos(\alpha)$, d'où :

$$\boxed{\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{J\omega}\left(\frac{\mathrm{d}\Gamma_c}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) - \Gamma_0\omega t\cos(\alpha)\right)}$$

3. Pour avoir un fonctionnement stable, il faut qu'en moyenne sur le premier tour d'arbre moteur, $\left\langle\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right\rangle < 0$ (le moteur accélère si sa vitesse de rotation n'est pas suffisante et décélère dans le cas contraire), soit :

$$\langle\Gamma_0\omega t\cos(\alpha)\rangle \geq \left\langle\frac{\mathrm{d}\Gamma_c}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)\right\rangle$$

soit, avec $\langle t\rangle = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ sur une période :

$$\Gamma_0\frac{\omega T}{2}\cos(\alpha) \geq \frac{\mathrm{d}\Gamma_c}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)$$

soit :

$$\boxed{\cos(\alpha) \geq \frac{1}{\pi\Gamma_0}\frac{\mathrm{d}\Gamma_c}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 7 Effet Mendocino (⋆⋆⋆)

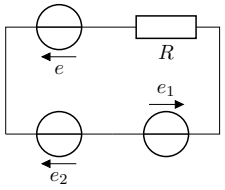
1. Si le champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ est uniforme, le rotor subit une action mécanique de la forme :

$$\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{0}\\ iNSB_0\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_z}\end{matrix}\right\}_O$$

avec i l'intensité du courant traversant la bobine de N spires de sections S et θ l'angle d'orientation de la normale à la bobine avec la verticale.

Dans un premier modèle (avec un nombre N de spires pas « trop élevé »), on ne tient compte que de la résistance R de la bobine (sa réactance X vérifie alors $X \ll R$). La loi d'Ohm permet de relier la force électromotrice e et le courant électromoteur i_{induit} :

$$e = Ri_{\text{induit}}$$



La force électromotrice e est déterminée par la loi de *Faraday* :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = +NSB_0\dot{\theta}\cos(\theta)$$

De plus, le courant i_{PV} délivré par chaque panneau photovoltaïque dépend de la surface s des panneaux, du flux lumineux ϕ et du rendement r des panneaux. On a ainsi :

$$i_{\text{PV}} = \frac{e_1-e_2}{R} = \frac{1}{R}s\phi r\cos(\theta)$$

avec r le rendement de conversion des panneaux photovoltaïques et s leur surface.

☞ La configuration à double panneaux permet de récupérer un flux lumineux sinusoïdal en branchant correctement les deux panneaux.

Le courant électrique étant d'intensité totale :

$$i = i_{\text{PV}} + i_{\text{induit}}$$

Le théorème du moment cinétique appliqué au rotor, de moment d'inertie J, en O, s'écrit dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire - supposé galiléen - :

$$J\ddot{\theta} = \left(\frac{1}{R}s\phi r\cos(\theta) - \frac{NSB_0}{R}\dot{\theta}\cos(\theta)\right)NSB_0\cos(\theta) = \left(\frac{1}{R}s\phi r - \frac{NSB_0}{R}\dot{\theta}\right)NSB_0\cos^2(\theta)$$

En régime stationnaire, $\ddot{\theta} = 0$, soit :

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{s\phi r}{NSB_0}} \quad \text{ou} \quad \cos(\theta) = 0$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. Si on rajoute deux autres panneaux photovoltaïques avec une bobine les reliant, le théorème du moment cinétique devient :

$$J\ddot{\theta} = \left(\frac{1}{R}s\phi r - \frac{NSB_0}{R}\dot{\theta}\right) NSB_0\cos^2(\theta) + \left(\frac{1}{R}s\phi r - \frac{NSB_0}{R}\dot{\theta}\right) NSB_0\sin^2(\theta) = \left(\frac{1}{R}s\phi r - \frac{NSB_0}{R}\dot{\theta}\right) NSB_0$$

soit, en régime stationnaire :

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{s\phi r}{NSB_0}}$$

On remarque que $\dot{\theta}$ est inversement proportionnel à B_0 : plus B_0 augmente et plus le régime de rotation du moteur est faible : les courants induits s'opposent aux courants délivrés par les cellules photovoltaïques.

On remarque ainsi que le régime moteur est le même dans une configuration à deux ou quatre panneaux photovoltaïques. Néanmoins, le moteur aura une évolution de vitesse de rotation moins oscillante dans une configuration à quatre panneaux. La montée en régime est résolue numériquement et affichée dans la *Figure 3*.

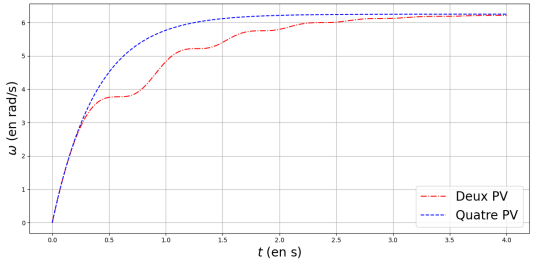


Fig 3. Évolution de la vitesse angulaire du moteur pour deux configurations.

➲ **Source : X,2023**

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/