Thermodynamique

(Cinétique des gaz)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Distribution de vitesses (⋆⋆)

On considère un gaz parfait monoatomique constitué de $N \gg 1$ atomes contenus dans une boîte carrée de longueur L. Chaque atome i, de masse m et d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k_i} = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v_i}^2$ est indépendant et indiscernable des autres atomes qui composent le gaz. On note :

$$f(v) = Av^2 e^{-\frac{m\beta v^2}{2}}$$

la densité de probabilité de trouver un atome de vitesse v à dv près, avec $A = \sqrt{\frac{2m^3\beta^3}{\pi}}$ et $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

1. Tracer $f(v)$ et identifier la vitesse v_0 la plus probable en fonction de la température T.
2. Calculer la vitesse moyenne $\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v f(v)\mathrm{d}v$ et la vitesse quadratique moyenne
$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 f(v)\mathrm{d}v}$$
3. En déduire l'écart-type $\sigma_v = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$ de la distribution de vitesses. Est-il négligeable par rapport à la vitesse quadratique moyenne des atomes ?

Données : $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^2}\mathrm{d}x$. $I_{k+2} = -\frac{\partial I_k}{\partial a}$

avec $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}$ et $I_1 = \frac{1}{2a}$.

L'essentiel

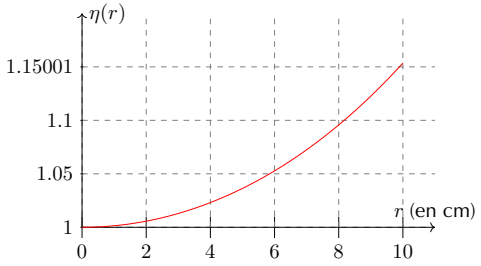
EXERCICE 2 Enrichissement d'uranium (⋆⋆)

Certains noyaux sont susceptibles de fissionner sous l'effet d'un bombardement de neutrons lents (vitesse $2,2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$) : on parle alors de noyaux fissibles. Le seul isotope fissible naturel est l'uranium-235. Dans les réacteurs REP, on privilégie cette fission par neutrons lents. Or l'uranium est un mélange naturel de deux isotopes principaux : l'uranium-238 (99,28%) et l'uranium-235 (0,714%). On améliore le rendement de la réaction de fission en enrichissant l'uranium naturel en uranium-235. Une fois extrait du sol, le minerai d'uranium est transformé chimiquement en hexafluorure d'uranium UF_6. Dans le procédé d'enrichissement par centrifugation, l'hexafluorure d'uranium est chauffé pour être transformé en vapeur, puis le gaz passe par une série de centrifugeuses qui vont l'enrichir jusqu'à une teneur de 3 à 5%. Ensuite refroidi et solidifié, l'hexafluorure d'uranium sera transformé en combustible nucléaire sous forme de pastilles.

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon $R \simeq 10$ cm et de hauteur $h \simeq 5$ cm, tournant autour d'un axe vertical Oz à la vitesse angulaire constante $\omega \simeq 50\ 000\ \mathrm{tr \cdot min^{-1}}$. Le gaz d'hexafluorure d'uranium UF_6 est introduit dans le cylindre. Les molécules ${}^{235}_{92}UF_6$ et ${}^{238}_{92}UF_6$ de masses différentes se répartissent alors différemment et il est possible de déterminer la distribution spatiale des molécules dans la centrifugeuse.

On considère dans un premier temps un gaz parfait de particules de masse m, thermostatées à la température $T \simeq 353$ K. On note $p(M)$ la pression, $n^*(r)$ la densité particulaire et $\rho(r)$ la masse volumique du gaz.

1. Faire un bilan des forces appliquées à un volume dτ de particules dans le référentiel lié au cylindre. On exprimera la résultante des forces de pression sous une forme volumique.
2. Justifier que le poids est négligeable par rapport à la force d'inertie d'entrainement.
3. Déduire de la condition d'équilibre relatif de la particule de fluide la répartition $n^*(r)$ des molécules dans le cylindre. On note $n^*(0)$ la répartition particulaire sur l'axe.
4. Montrer que la répartition $n^*(r)$ obéit à une statistique de Boltzmann.
5. On donne l'allure du rapport $\eta(r)$ des densités particulaires $n^*_{235}(r)$ et $n^*_{238}(r)$ des molécules ${}^{235}_{92}UF_6$ et ${}^{238}_{92}UF_6$ en fonction de r. En déduire le principe de base de l'enrichissement de l'uranium et expliquer le protocole permettant d'obtenir le gaz enrichi en ${}^{235}_{92}UF_6$. Préciser le nombre de centrifugeuses nécessaire pour enrichir l'uranium pour un usage civil.



EXERCICE 3 Temps de diffusion d'un parfum (⋆⋆)

1. Estimer un ordre de grandeur de la vitesse moyenne v pour des particules de gaz à la température T. On prendra $T \simeq 300$ K et $M \simeq 50\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.
2. Si on assimile les particules du gaz à des boules de diamètre d, estimer l'ordre de grandeur du diamètre d.
3. Pour un gaz de pression $p \simeq 1$ bar et de température T estimer un ordre de grandeur de la distance moyenne entre deux chocs de ces particules. Cette distance est appelée libre parcours moyen et se note ℓ.

Au temps $t = 0$, en un point O, un opérateur appuie sur un diffuseur de parfum.

4. Montrer que $r(t) = \sqrt{v\ell t}$.
5. À quelle distance moyenne $r(t)$ se trouve une particule de ce parfum à un instant t. En déduire au bout de combien de temps la particule se trouve en moyenne à 10 cm de l'opérateur.

EXERCICE 4 Expérience de Kappler (⋆)

L'expérience de Kappler (1931) a permis de mesurer la constante de Boltzmann à partir des fluctuations de position d'un petit pendule de torsion placé dans une enceinte thermostatée de température T.

Le pendule est constitué par un petit miroir suspendu au bout d'un fil de quartz, représenté en *Figure 1*. Ce miroir peut tourner autour de l'axe du fil et sa position est repérée par l'angle de torsion φ du fil, angle dont l'origine est prise lorsque le fil n'est pas déformé. Le miroir est à l'équilibre avec le gaz à température T qui l'entoure. Il est sujet à des fluctuations de sa position angulaire ($\varphi = 0$) dues à l'agitation thermique. L'énergie potentielle associée à la torsion du fil est $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}C\varphi^2$ où C est la constante de rappel du fil.

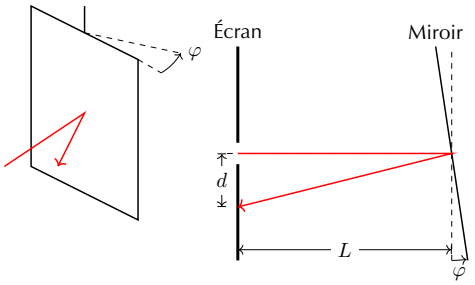


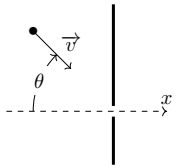
Figure 1 – Dispositif de Kappler

1. Pour repérer la rotation du miroir, on l'éclaire avec un rayon lumineux dont l'angle d'incidence est nul lorsque $\varphi = 0$. Le rayon réfléchi engendre un point lumineux sur un écran placé à une distance L du miroir. Quelle est la distance d entre ce point lumineux et le rayon incident lorsque le miroir a tourné d'un petit angle φ ?
2. L'angle φ fluctue autour de 0.
   a. En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, exprimer $\langle \varphi^2 \rangle$.
   b. Avec les données suivantes : $T \simeq 287,1$ K, $C \simeq 9,428 \times 10^{-16}\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$ et $L \simeq 0,865$ m, Kappler a mesuré $\langle d^2 \rangle \simeq 1,250 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2}$. Quelle valeur de la constante de Boltzmann a-t-il trouvé ?

Pour aller plus loin

EXERCICE 5 Fuite dans une cabine spatiale (⋆⋆)

Dans une cabine spatiale de volume $V_0 \simeq 10\ \mathrm{m^3}$ se trouve de l'air à la température $T_0 \simeq 298$ K constante. L'une des parois est percée d'un petit trou de section s, suffisamment petit pour ne pas perturber la distribution d'équilibre du gaz à un instant t donné.



On note $N(t)$ le nombre de molécules de gaz dans la cabine à l'instant t.

1. Dans quel volume dV sont contenus les atomes de vitesse $\overrightarrow{v}$ à d$\overrightarrow{v}$ près, qui vont sortir de la cabine pendant la durée dt ?
2. Quel est le nombre de ces atomes ? On utilisera la distribution de Maxwell-Boltzmann.
3. Donner une équation différentielle satisfaite par $N(t)$.
4. Quelle est la durée pour que la cabine spatiale soit entièrement vidée de son air ? Proposer une application numérique pour un trou circulaire de dimension typique 0,1 mm.

Données :

- Masse moyenne d'une molécule d'air $9,6 \times 10^{-26}$ kg.
- Constante de Boltzmann : $k_B \simeq 1,38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 1 Distribution de vitesses (**)

1. Le graphe de $f(v)$ est représenté en *Figure 2* pour trois températures T :

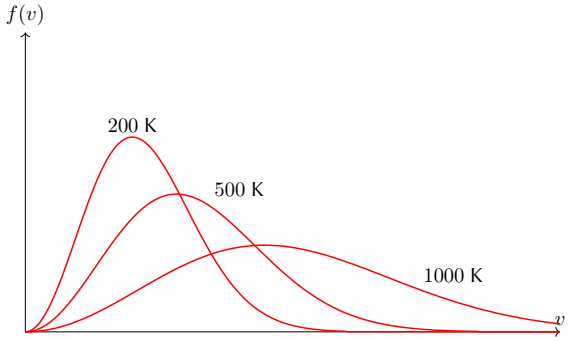


Figure 2 – Distribution des vitesses dans un gaz

La vitesse v_0 la plus probable d'une particule vérifie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}(v_0) = 0$, soit :

$$2v_0 e^{-\beta\frac{mv_0^2}{2}} + v_0^2 \times (-\beta m v_0)\, e^{-\beta\frac{mv_0^2}{2}} = 0$$

d'où :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2}{\beta m}}}$$

2. La vitesse moyenne $\langle v\rangle$ des particules est :

$$\langle v\rangle = \int_0^{+\infty} A v^3 e^{-\beta\frac{mv_0^2}{2}} \mathrm{d}v = AI_3$$

avec $a = \frac{\beta m}{2}$, soit :

$$\langle v\rangle = A \times \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}a} = -A \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{A}{2a^2}$$

La vitesse moyenne $\langle v\rangle$ des particules du gaz est donc :

$$\boxed{\langle v\rangle = \sqrt{\frac{2m^3\beta^3}{\pi}} \times \frac{2}{\beta^2 m^2} = \sqrt{\frac{8}{\pi m\beta}}}$$

Le carré de la vitesse quadratique moyenne peut être exprimé comme suit :

$$\langle v^2\rangle = AI_4 = A\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}a} = A\frac{\mathrm{d}^2 I_0}{\mathrm{d}a^2} = A\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}a^{-\frac{1}{2}}\right) = A \times \sqrt{\frac{\pi}{4}} \times \frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2} \times a^{-\frac{5}{2}}$$

soit :

$$\langle v^2\rangle = \frac{3}{m\beta}$$

La vitesse quadratique moyenne est donc :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\boxed{\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3}{m\beta}}}$$

En résumé, on a :

- La vitesse moyenne $\langle v\rangle$ d'une particule du gaz vérifie : $\langle v\rangle \simeq 0,92\sqrt{\langle v^2\rangle}$.
- La vitesse la plus probable v_0 d'une particule du gaz vérifie : $v_0 \simeq 0,81\sqrt{\langle v^2\rangle}$.

3. L'écart-type σ_v de la distribution de vitesses se calcule comme suit :

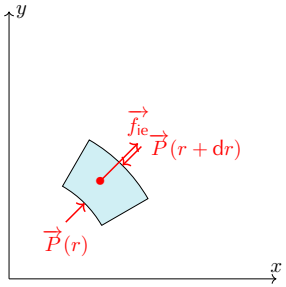
$$\boxed{\sigma_v = \sqrt{\langle v^2\rangle - \langle v\rangle^2} \simeq 0,39\sqrt{\langle v^2\rangle}}$$

L'écart-type σ_v représente donc environ 39% de la vitesse quadratique moyenne. Cette valeur n'est **absolument pas négligeable** : il est nécessaire de prendre en compte l'intégralité de la distribution des vitesses des particules dans un gaz parfait.

L'essentiel

EXERCICE 2 Enrichissement d'uranium (**)

1. Vu du dessus, le problème est schématisé ci-dessous :



Il y a invariance du problème par rotation d'angle θ. Supposant le cuve pas très haute (moins de 8 km de haut), on peut négliger l'influence du champ de pesanteur sur la répartition des particules. Le bilan de forces s'écrit ainsi :

$$\vec{P}(r) - \vec{P}(r+\mathrm{d}r) + \vec{f}_{ie} = \vec{0}$$

Soit :

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\ \vec{u_r} = -\vec{f}_{ie} = -\rho r\omega^2 r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}r\ \vec{u_r}$$

On en déduit ainsi :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \rho r\omega^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(p) = \vec{f}_{ie}}$$

2. En comparant l'influence du poids et de la force d'inertie d'entraînement, on a :

$$\frac{\rho g}{\rho R\omega^2} \simeq 3,6 \times 10^{-6}$$

On peut donc **négliger l'influence du poids** devant celle de la force d'inertie d'entraînement.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. Les équations régissant l'évolution spatiale de $n^*(r)$ sont les suivantes :

   - Statique des fluides en référeniel tournant : $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \rho(r) \times r\omega^2$
   - Lien entre la masse volumique et la densité particulaire : $\rho(r) = mn^*(r)$
   - Équation d'état du gaz parfait : $p(r) = \rho(r)rT$ avec $r_s = \frac{R}{M}$ la constante spécifique du gaz.

   La densité particulaire $n^*(r)$ vérifie donc :

$$mr_sT\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}(r) = n^*(r)mr\omega^2$$

   soit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}(r) - \frac{m\omega^2}{k_BT}rn^*(r) = 0}$$

4. La forme des solutions de l'équation différentielle est :

$$n^*(r) = n^*(0)e^{\int_0^r \frac{m\omega^2}{k_BT}r\mathrm{d}r} = n^*(0)e^{\frac{m\omega^2r^2}{2k_BT}}$$

   L'énergie potentielle d'une particule de masse m liée à la force d'inertie d'entraînement vérifie :

$$\overrightarrow{f_{\text{ie}}} = mr\omega^2\,\overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(-\frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \text{cte}\right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_p(r) = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \text{cte}$$

   Si $n^*(r)$ vérifie une statistique de Maxwell Boltzmann, on a :

$$n^*(r) = Ae^{-\frac{\mathcal{E}_p}{k_BT}} = Ae^{\frac{mr^2\omega^2}{2k_BT}}$$

   On obtient bien la même fonction donc n^* suit une statistique de Maxwell-Boltzmann.

5. Chaque densité particulaire suit une statistique de Maxwell-Boltzmann, on a donc :

$$\eta(r) = \frac{n^*_{238}(r)}{n^*_{235}(r)} = \frac{e^{\frac{m_{238}\omega^2r^2}{k_BT}}}{e^{\frac{m_{235}\omega^2r^2}{k_BT}}} = e^{\frac{(m_{238}-m_{235})\omega^2r^2}{k_BT}}$$

   Numériquement, on obtient $\eta(0) \simeq 1,15\eta(R)$: le centre de la centrifugeuse est 15% plus riche en $_{235}$U que la périphérie. Il faut donc prélever le mélange au centre de la centrifugeuse et le refaire passer dans plusieurs centrifuseuses en cascade.

   Pour passer d'un taux $t_1 \simeq 0,714\%$ à un taux $t_2 \simeq 4\%$, par gain de $g \simeq 15\%$ par centrifugeuse, il faut un nombre N de centrifugeuses vérifiant :

$$t_1 \times g^N = t_2 \Rightarrow \boxed{N = \frac{\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)}{\ln(g)} \simeq 12 \text{ centrifugeuses}}$$

➲ Source : Centrale, 2016

EXERCICE 3 Temps de diffusion d'un parfum (⋆⋆)

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

1. La vitesse quadratique moyenne v d'un gaz à la température T vérifie :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_BT \quad \text{soit} \quad \boxed{v = \sqrt{3\frac{k_BT}{m}} = \sqrt{3\frac{R}{M}T} \simeq 387 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

2. Pour un gaz composé de molécules monoatomiques ou diatomiques, $d \sim 2$ à 3 Å.
3. Pour un gaz parfait à $p \simeq 1$ bar, le volume molaire occupé est, d'après l'équation d'état des gaz parfaits :

$$V_m = \frac{RT}{p} \simeq 24,9 \text{ L}$$

   Le libre parcours moyen ℓ est ainsi :

$$\boxed{\ell = \frac{V}{\pi d^2 N} = \frac{k_BT}{\pi d^2 p} \simeq 146 \text{ nm}}$$

   ⚠ $\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$ permet de caractériser la distance interatomique et non le libre parcours moyen.

4. En supposant que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de la particule de parfum est une suite de K vecteurs libre parcours moyen $\overrightarrow{\ell_i}$:

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{K} \overrightarrow{\ell_i}$$

   telle que $\left\langle \overrightarrow{OM} \right\rangle = \overrightarrow{0}$, caractéristique du mouvement brownien, l'écart-type σ de la distribution des vecteurs position est :

$$\sigma = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{OM}^2 \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{OM} \right\rangle^2} = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{OM}^2 \right\rangle}$$

   Or, $\overrightarrow{OM}^2 = \left(\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{\ell_i}\right)^2 = \sum_{i=0}^{k} \ell_i^2 + \sum_{j\neq i} \overrightarrow{\ell_i} \cdot \overrightarrow{\ell_j}$. Comme le mouvement brownien est caractérisé par un mouvement microscopique de direction aléatoire, on a :

$$\left\langle \overrightarrow{OM}^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{K} \ell_i^2 \right\rangle + \left\langle \sum_{j\neq i} \overrightarrow{\ell_i} \cdot \overrightarrow{\ell_j} \right\rangle = K\ell^2 + \sum_{j\neq i} \left\langle \overrightarrow{\ell_i} \cdot \overrightarrow{\ell_j} \right\rangle$$

   avec $\left\langle \overrightarrow{\ell_i} \cdot \overrightarrow{\ell_j} \right\rangle = \overrightarrow{0}$, soit :

$$\sigma = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{OM}^2 \right\rangle} = \sqrt{r^2(t)} = \sqrt{K\ell^2}$$

   Le nombre K de collisions de la particule de parfum avec les particules voisines peut être relié à la durée moyenne τ entre deux collisions :

$$\tau = \frac{\ell}{v} = \frac{\ell}{\sqrt{3\frac{RT}{M}}}$$

   Au bout d'un temps t, il y aura ainsi $K = \frac{t}{\tau}$ collisions en moyenne, soit :

$$\boxed{r(t) = \sqrt{\frac{\sqrt{3\frac{RT}{M}}}{\ell}t\ell} = \sqrt{\ell\sqrt{3\frac{RT}{M}}t}}$$

   ☞ Le rayon $r(t)$ a ici pour signification celle de l'écart-type de la distribution aléatoire des positions de la particule de parfum. Il faut donc comprendre ici que la particule a environ 68% de chance d'être comprise dans une sphère de rayon $r(t)$, 95% dans une sphère de rayon 2σ, etc.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

5. La particule se trouve ainsi à $r \simeq 10$ cm lorsque :

$$t = \frac{r^2}{\ell\sqrt{3\frac{RT}{M}}} \simeq 177 \text{ s}$$

avec $D = \ell\sqrt{3\frac{RT}{M}} \simeq 5,66 \times 10^{-5}$ m$^2 \cdot$ s^{-1} le coefficient de diffusivité de la particule de parfum dans l'air.

☞ La diffusion est un phénomène lent, il faut rajouter de la convection de l'air pour accélérer le transfert de particules.

➲ Source : F. Lachize

EXERCICE 4 Expérience de Kappler (⋆)

1. D'après la loi de la réflexion de Descartes, l'angle de réflexion est le même que l'angle d'indicence. La configuration est donc représentée en *Figure 3* :

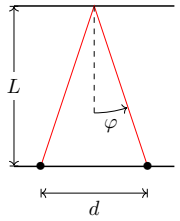


Figure 3 – Réflexion du faisceau

On a donc :

$$d = 2L\tan(\varphi)$$

Pour un petit angle devant 2π, on peut approximer la relation précédente avec :

$$\boxed{d = 2L\varphi}$$

2. Le miroir est un système dont l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ contient deux termes quadratiques :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}C\varphi^2$$

avec J le moment d'inertie axial du miroir.

Le théorème d'quipartition précise ainsi que chaque degré de liberté quadratique est comptabilisé en moyenne à hauteur de $\frac{1}{2}k_BT$ dans l'énergie interne du système :

$$\frac{1}{2}C\langle\varphi^2\rangle = \frac{1}{2}k_BT$$

soit :

$$\boxed{\langle\varphi^2\rangle = \frac{1}{4L^2}\langle d^2\rangle = \frac{k_B}{C}T}$$

3. Avec les mesures effectuées, on trouve :

$$\boxed{k_B = \frac{\langle d^2\rangle C}{4L^2T} \simeq 1,186 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{soit} \quad 3,6\% \text{ d'erreur}}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Pour aller plus loin

EXERCICE 5 Fuite dans une cabine spatiale (⋆⋆)

1. Les particules de vecteur-vitesse $\vec{v}$ à $\mathrm{d}\vec{v}$ près qui peuvent sortir dans un instant $\mathrm{d}t$ sont contenues dans un cyclindre de volume :

$$\boxed{\mathrm{d}V = sv\cos(\theta)\mathrm{d}t = sv_x\mathrm{d}t}$$

2. La probabilité $\mathrm{d}\mathbb{P}$ d'avoir une particule de vitesse $v_x\mathrm{d}v_x$ est :

$$\mathrm{d}\mathbb{P} = \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}\mathrm{d}v_x \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{k_BT}$$

Le nombre d^2N de particules susceptibles de sortir de la cabine sur l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ et ayant une vitesse $v_x \pm \mathrm{d}v_x$ (deux événements indépendants : on peut faire le produit des probabilités) est :

$$\mathrm{d}^2N = \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}\mathrm{d}v_x \times N(t) \times \frac{sv_x\mathrm{d}t}{V_0}$$

avec $N(t)$ le nombre total de particules dans la cabine à (l'instant t). Le nombre $\mathrm{d}N$ de particules sortant de la cabine sur l'instant $\mathrm{d}t$ (peu importe leur vitesse v_x) est ainsi :

$$\boxed{\mathrm{d}N = \frac{Ns}{V_0}\sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}\left(\int_0^{+\infty} v_xe^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}\mathrm{d}v_x\right)\mathrm{d}t = \frac{Ns}{V_0}\sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}\left[\frac{-1}{\beta m}e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}t = \frac{s}{V_0\sqrt{2\pi\beta m}}N(t)\mathrm{d}t}$$

3. En faisant un bilan de population dans la cabine entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, on obtient :

$$N(t) - N(t+\mathrm{d}t) = \frac{s}{V_0\sqrt{2\pi\beta m}}N(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{V_0\sqrt{2\pi\beta m}}N(t) = 0}$$

4. On note $\tau = \frac{V_0\sqrt{2\pi\beta m}}{s} \sim 15,4 \times 10^6$ s $\sim$ 4287h $\sim$ 179 jours la constante de temps caractéristique de l'évolution de la population d'atomes dans la cabine. On peut considérer la cabine vidée au bout de $\boxed{5\tau \simeq 893 \text{ jours}}$.

➲ Source : F. Lachize

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/