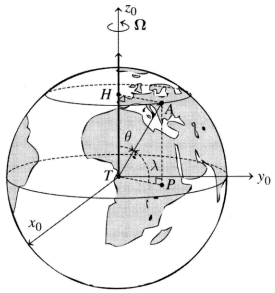
Mécanique

(Forces centrales conservatives)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Lancement de fusée (⋆)

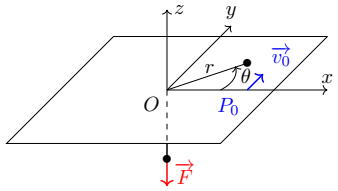
Les lanceurs (ou fusées) sont tirés dans l'espace depuis des bases situées à des latitudes λ variées : Cap Canaveral aux États-Unis ($\lambda_1 \simeq 28,5°$), Pletsek en Russie ($\lambda_2 \simeq 63°$), Baïkonour dans le Kazakhstan ($\lambda_3 \simeq 46,3°$), Tanegashimaau au Japon ($\lambda_4 \simeq 30,5°$) et Kourou en Guyane Française ($\lambda_5 \simeq 5,2°$).



1. La fusée étant fixée au sol (rayon de la Terre : $R_T \simeq 6400$ km), calculer la norme v de sa vitesse, par rapport au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0 = Tx_0y_0z_0$ due à la rotation uniforme de la Terre, de vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega} = \omega_T \overrightarrow{e}_{S\to N}$ et de vitesse angulaire $\omega_T \simeq 7,29 \times 10^{-5}$ rad · s^{-1} autour de son axe sud-nord. Commenter.

EXERCICE 2 Palet en rotation (⋆)

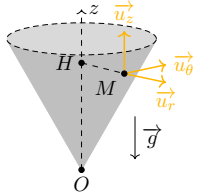
Un palet P de masse m glisse sans frottement sur un plateau horizontal (Oxy) percé d'un trou à l'origine O. Sa position est repérée par les coordonnées polaires r et θ, d'axe (Oz). L'expérimentateur lance le palet, à la distance r_0 du point O, avec une vitesse initiale orthoradiale $\overrightarrow{v} = v_0 \overrightarrow{u}_{\theta_0}$ (on prendra $\theta(t=0) = \theta_0 = 0°$), et tire sur le fil de façon à rapprocher régulièrement le palet du point O : $r(t) = r_0 - Vt$. On admet que la force exercée par le fil (qui reste toujours tendu) sur P est $\overrightarrow{F} = -F\ \overrightarrow{u_r}$.



1. Montrer que la vitesse angulaire du palet s'écrit $\omega = \dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{(r_0 - Vt)^2}$. En déduire l'évolution de la force $\overrightarrow{F}$ qu'il faut exercer pour réaliser cet objectif. Commenter.
2. Calculer directement le travail de traction fourni par cet opérateur s'il fait passer la distance du mobile à l'axe de la valeur r_0 à la valeur r_1.

EXERCICE 3 Particule dans un cône (⋆⋆)

Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans un cône d'axe (Oz) vertical et de demi-angle au sommet valant α. À l'instant initial, il est lancé à l'altitude z_0 avec une vitesse horizontale $\overrightarrow{v_0} = v_0\ \overrightarrow{u_\theta}$.



On observe alors l'évolution suivante, représentée pour une vue oblique et pour une vue de dessus de l'évolution du point M.

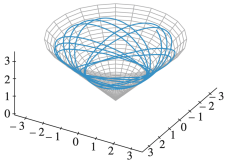


Figure 1 – Vue oblique

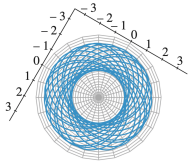


Figure 2 – Vue de dessus

1. Pourquoi le point M contourne-t-il l'axe (Oz) en tournant toujours dans le même sens, et sans jamais tomber au fond du cône ?
2. En exprimant deux constantes du mouvement, justifier l'évolution du point entre deux altitudes extrêmes.
3. La trajectoire pourrait-elle être circulaire ?

EXERCICE 4 Approche d'un astéroïde (⋆)

Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0 = Ox_0y_0z_0$ est supposé galiléen, et on néglige les effets gravitationnels du Soleil. Un astéroïde de masse m et de taille négligeable par rapport à la masse M_T de la Terre est repéré en M_0, à une distance très grande de la Terre où on supposera que son influence gravitationnelle est négligeable. On mesure son vecteur-vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\ \overrightarrow{u}_{x_0}$, porté par la droite (M_0x_0) telle que la distance du centre de la Terre à (M_0x_0) est b (b est le « paramètre d'impact »).

1. Montrer que $\mathcal{E}_m(M)$ et $\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_0}(M)$ se conservent.

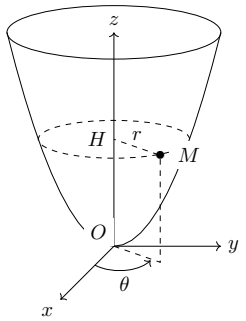
Exprimer les deux constantes du mouvement en fonction des données initiales.

2. Exprimer l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ en fonction de m, M_T, et L_O.
3. Déterminer la distance minimale $r_{\min}$ à laquelle l'astéroïde passe par rapport au centre de la Terre et donner la condition de non collision. On utilisera très utilement le potentiel effectif.

L'essentiel

EXERCICE 5 Bille sur cuvette parabolique (⋆⋆)

Une petite bille de masse m peut rouler sur une surface S fixe par rapport au référentiel terrestre $(\mathcal{R})$ considéré comme galiléen.



Cette surface est un paraboloïde de révolution, d'axe vertical ascendant (Oz), et décrit par l'équation : $r^2 - az = 0$ ($a > 0$) en coordonnées cylindriques.

On modélise la bille par un point matériel M se déplaçant sans frottements sur la surface : la réaction $\overrightarrow{R}$ exercée par S sur M est alors contenue dans le plan méridien (OHM).

1. Moment cinétique
   - **a.** Exprimer dans la base cylindrique la vitesse de M par rapport au référentiel (R) et en déduire le moment cinétique de M en O, noté $\overrightarrow{L}_O(M)$.
   - **b.** En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que la composante de $\overrightarrow{L}_O(M)$ selon $\overrightarrow{u_z}$ se conserve au cours du temps. On notera L cette constante : exprimer L en fonction de m, r et $\dot{\theta}$.
2. Énergie
   - **a.** Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_C(M)$ du point M dans le référentiel $(\mathcal{R})$ en fonction de L.
   - **b.** Justifier l'existence d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(M)$ et l'exprimer en fonction de r uniquement. On prendra $\mathcal{E}_p(0) = 0$.
   - **c.** Que peut-on dire de l'énergie mécanique du point M ? Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$\mathcal{E}_m(r,\dot{r}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + \mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}(r)$$

   avec $\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}(r)$ à exprimer en fonction de L, m, a et r.
3. Trajectoire : on suppose qu'on lance initialement la bille horizontalement à la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(0) = v_0\ \overrightarrow{u_\theta}$.
   - **a.** Montrer, à l'aide du moment cinétique, que la bille ne peut pas passer par le point O si $v_0 \neq 0$.
   - **b.** Tracer la courbe $\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}(r)$.
   - **c.** Montrer graphiquement que le bille évoluera entre deux altitudes non nulles.
   - **d.** Préciser l'état de la particule.

EXERCICE 6 Trou noir (⋆⋆)

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogue relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposée dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine, mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle heuristique de physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un astre sphérique de masse m_0, de rayon R et de centre O. Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

1. Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M. Celle-ci se conserve-t-elle ?

On admet que le mouvement est plan. On adopte donc le système de coordonnées cylindrique dans la suite de l'exercice. On admet de plus que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{\text{p,eff}}(r)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{\text{p,eff}}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de $\mathcal{E}_{\text{p,eff}}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de $\mathcal{E}_m$ le point M peut échapper à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.
4. En déduire la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre.
5. Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c \simeq 3 \times 10^8$ m · s^{-1}. Exprimer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.
6. Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_S \simeq 2,0 \times 10^{30}$ kg) et pour la Terre ($M_T \simeq 6,0 \times 10^{24}$ kg). En déduire la densité minimale d'un trou noir de cette masse.
7. Quelles sont les deux contradictions internes à cette approche ? Notons toutefois que malgré les deux limites évoquées, le rayon de Schwarzschild donne le bon ordre de grandeur de la taille d'un trou noir de masse m.

EXERCICE 7 Interaction faible (⋆⋆)

Dans la théorie de Yukawa sur les forces nucléaires, l'interaction attractive entre un neutron et un proton est caractérisée par l'énergie potentielle suivante, fonction de la distance r qui sépare les deux particules :

$$\mathcal{E}_p(r) = \frac{K}{r}e^{-\frac{r}{a}}$$

a étant une distance caractéristique et K une constante négative d'interaction.

1. Donner l'expression de la force correspondante.
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{\text{peff}}$ en fonction de la masse μ du système et de son moment cinétique L dans le référentiel du centre de masse. Le graphe $\mathcal{E}_{\text{peff}}(r)$ a l'allure représentée sur la *Figure 3*.

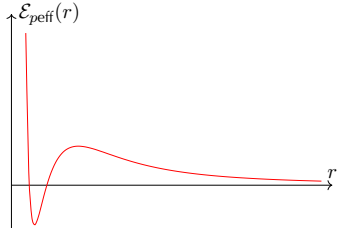


Figure 3 – Allure du profil de potentiel

Discuter les différents mouvements possibles suivant la valeur de l'énergie $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$. Quelle est l'équation qui relie les constantes L, a, μ, K à la valeur $r_{\text{éq}}$ pour laquelle la dérivée $\frac{\text{d}\mathcal{E}_{\text{peff}}}{\text{d}r}$ est nulle ?

Pour aller plus loin

EXERCICE 8 Force centrale en $\frac{1}{r^3}$ (⋆⋆)

Un point matériel M de masse m est soumis, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, à une force d'expression $\overrightarrow{F} = -\frac{a}{r^3}\overrightarrow{u_r}$ en coordonnées sphériques de centre O, a étant une constante positive. À l'instant initial, M est à la position M_0 telle que $\overrightarrow{OM_0} = r_0\ \overrightarrow{u_x}$, avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0(\cos(\alpha)\ \overrightarrow{u_x} + \sin(\alpha)\ \overrightarrow{u_y}$.

1. Montrer que le mouvement est plan et déterminer le plan de la trajectoire.
2. Montrer que la force $\overrightarrow{F}$ est une force conservative. En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ dont elle dérive (on prendra $\mathcal{E}_p(\infty) = 0$). Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{\text{p,eff}}$ compte tenu des conditions initiales.
3. r_0 étant donné, indiquer la condition sur v_0 pour que le système soit dans un état de diffusion.
4. La particule est dans un état de diffusion et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
   a. Établir que $\dot{r} = \frac{r_0 v_0}{r^2}\frac{\text{d}r}{\text{d}\theta}$. En déduire que $\dot{r} = -r_0 v_0 u'_\theta$ avec $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ et $u'_\theta = \frac{\text{d}u}{\text{d}\theta}$.
   b. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique en fonction de la variable u et de u'_θ.En déduire que u vérifie l'équation :

$$u''_\theta + \eta^2 u = 0$$

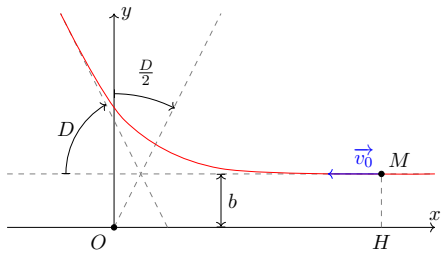
avec $\eta = \sqrt{1 - \frac{a}{mr_0^2 v_0^2}}$.

   c. Déterminer l'équation polaire de la trajectoire compte tenu des conditions initiales.
   d. Donner l'allure de la trajectoire pour $\eta \simeq 0,1$, $\theta_0 \simeq 0°$ et $r_0 \simeq 1$ m.

EXERCICE 9 Expérience de Rutherford (⋆⋆⋆)

Un noyau d'hélium (hélion) assimilé à un système ponctuel M (de charge $q > 0$) est lancée en direction d'une cible O chargée positivement de masse m_O. À grande distance de O, la particule M, de masse m ($m_O \gg m$), se déplace parallèlement à (Ox), à une distance b de cet axe et avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$. La loi d'interaction entre M et O est une force répulsive dont la norme est du type $F = \frac{K}{r^2}$. On admet ici que $r^2\dot{\theta} = bv_0$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/



1. Calculer la valeur minimale r_m du rayon d'approche de l'hélion.
2. En posant $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$, montrer que M est dévié d'un angle D tel que :

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{K}{mv_0^2 b}$$

On répète l'expérience de Rutherford en envoyant, sur une cible fixe dans le référentiel du laboratoire et constitué par une très mince feuille d'or, des hélions d'énergie $\mathcal{E}_0 \simeq 5$ MeV. On supposera la masse des atomes d'or grande devant la masse des hélions. On observe une déviation des hélions atteignant 150° au maximum.

3. Calculer le paramètre d'impact b. En déduire une borne supérieure de la valeur du rayon du noyau de l'atome d'or.

Donnée :

- Numéro atomique de l'or $Z = 79$.
- 1 eV $\simeq 1,6 \times 10^{-19}$ J.
- $K = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$ avec $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ F · m^{-1} et $e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ C.

EXERCICE 10 Vecteur de Runge Lenz (⋆⋆⋆)

On considère une particule ponctuelle M de masse m dont la position est repérée par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen de repère $(Oxyz)$. Sa vitesse dans $\mathcal{R}$ est notée $\overrightarrow{v}$. La particule est plongée dans un champ de force dérivant du « potentiel » $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ (avec $\alpha > 0$; il s'agit d'une autre manière de parler de l'énergie potentielle : $\mathcal{E}_p = V(r)$).

1. Montrer que $\overrightarrow{\mathcal{L}_O(M)} = \overrightarrow{r} \wedge m\overrightarrow{v}$, moment cinétique de M par rapport à O dans $\mathcal{R}$, est un vecteur constant. Exprimer $L_z = \overrightarrow{\mathcal{L}_O(M)} \cdot \overrightarrow{u_z}$ en fonction de m, r et $\dot{\theta}$. Cette relation est une intégrale première du mouvement.
2. Montrer que l'énergie $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + V(r)$ est une intégrale première du mouvement. Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, m et α.
3. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathcal{L}_O(M)} - \alpha\frac{\overrightarrow{r}}{r}$ est une intégrale première.
   b. Comment sont disposés l'un par rapport à l'autre les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{\mathcal{L}_O(M)}$? Quelles sont les coordonnées polaires A_r et A_θ de $\overrightarrow{A}$ dans le repère mobile $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$? Nous prendrons $\overrightarrow{u_x}$ suivant $\overrightarrow{A}$ (soit $A_x = A$). Montrer que dans ces conditions r, $\dot{\theta}$ et $\dot{r}$ peuvent être exprimés comme des fonctions de la seule variable θ et des paramètres L_z, A, m et α. Donner ces expressions.
   c. Mettre l'expression de r sous la forme : $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta$. À quelle courbe correspond cette fonction ? Exprimer p et e en fonction des paramètres L_z, A, m et α.
   d. Calculer $\mathcal{E}_m$ et $a = \frac{p}{1-e^2}$ en fonction des paramètres L_z, A, m et α. Quelle valeur maximale $A_{\max}$ peut prendre A pour que le mouvement reste de dimension finie ? Pour une valeur de A inférieure à $A_{\max}$ tracer l'allure de la courbe en indiquant la position du vecteur $\overrightarrow{A}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 1 Lancement de fusée (⋆)

1. La fusée étant posée au sol, sa vitesse dans le référentiel géocentrique dépend de la latitude :

$$v = R_T \cos(\lambda)\omega_T$$

soit, à Cap Canaveral aux États Unis ($v \simeq 410$ m $\cdot$ s^{-1}), à Pletsek en Russie ($v \simeq 212$ m $\cdot$ s^{-1}), à Baïkonour dans le Kazakhstan ($v \simeq 322$ m $\cdot$ s^{-1}), Tanegashimaau au Japon ($v \simeq 402$ m $\cdot$ s^{-1}) et Kourou en Guyane Française ($v \simeq 465$ m $\cdot$ s^{-1}).

EXERCICE 2 Palet en rotation (⋆)

1. Le palet est soumis à :
   - son poids $\overrightarrow{P}$ vertical vers le bas, de moment en O : $\overset{\rightharpoonup}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{P}\right) = -mrg\,\overrightarrow{u_\theta}$
   - La réaction normale du support $\overrightarrow{N}$ (en l'absence de frottement), de moment en O : $\overset{\rightharpoonup}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{N}\right) = rN\,\overrightarrow{u_\theta}$.
   - La tension du fil $\overrightarrow{F} = -F\,\overrightarrow{u_r}$, de moment en O nul puisque $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

Le théorème du moment cinétique appliqué à M au point O dans le référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overset{\rightharpoonup}{\mathcal{L}}_O(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overset{\rightharpoonup}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{P}\right) + \overset{\rightharpoonup}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{N}\right) + \overset{\rightharpoonup}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{F}\right)$$

Or, dans la direction (Oz), il reste :

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

Le moment cinétique suivant l'axe z est conservé, soit $L_z = mr_0v_0 = mr^2\dot{\theta}$.
La vitesse angulaire du palet est donc :

$$\boxed{\dot{\theta} = \omega = \frac{r_0v_0}{(r_0 - Vt)^2}}$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F$$

soit :

$$\boxed{F = \frac{r_0^2v_0^2}{(r_0 - Vt)^3}}$$

Cette force croît au fur et à mesure que le palet se rapproche du centre O.

2. Le travail à fournir par l'opérateur est le travail de la force s'exerçant sur le système :

$$W_{\text{op}} = \int_{r_0}^{r_1} \delta W(\overrightarrow{F}) = \int_{r_0}^{r_1} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = -\int_{r_0}^{r_1} F\mathrm{d}r = -\int_{r_0}^{r_1} \frac{r_0^2v_0^2}{r^3}\mathrm{d}r$$

soit :

$$\boxed{W_{\text{op}} = r_0^2v_0^2\left[\frac{1}{2r^2}\right]_{r_0}^{r_1} = \frac{r_0^2v_0^2}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) = \frac{v_0^2}{2}\left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1\right) \geq 0}$$

Le travail fourni par l'opérateur doit être moteur, on a donc $W_{\text{op}} \geq 0$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 3 Particule dans un cône (⋆⋆)

1. Le point M est soumis à :
   - Son poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$, de moment en H : $\overset{\rightharpoonup}{\mathscr{M}}_H\left(\overrightarrow{P}\right) = -mrg\,\overrightarrow{u_\theta}$
   - La réaction normale du support $\overrightarrow{N} = N(-\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_r} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_z})$ de moment en H : $\overset{\rightharpoonup}{\mathscr{M}}_H\left(\overrightarrow{N}\right) = -Nr\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_\theta}$.

Le théorème du moment cinétique selon l'axe (Oz) s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{P}\right) + \mathscr{M}_z\left(\overrightarrow{N}\right) = 0$$

Le moment cinétique de la bille se conserve.
Par conséquent, si $r \to 0$, alors $\dot{\theta} = \frac{L_z}{mr^2} \to +\infty$ ce qui est impossible. Par conséquent, la bille ne peut pas tomber au fond du cône.

2. On a vu que le moment cinétique suivant l'axe z se conserve, soit :

$$\boxed{L_z = mr^2\dot{\theta} = mz_0\tan(\alpha)v_0} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{z_0v_0\tan(\alpha)}{r^2}}$$

De plus, le théorème de l'énergie mécanique appliqué à la bille M dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W(\overrightarrow{N})$$

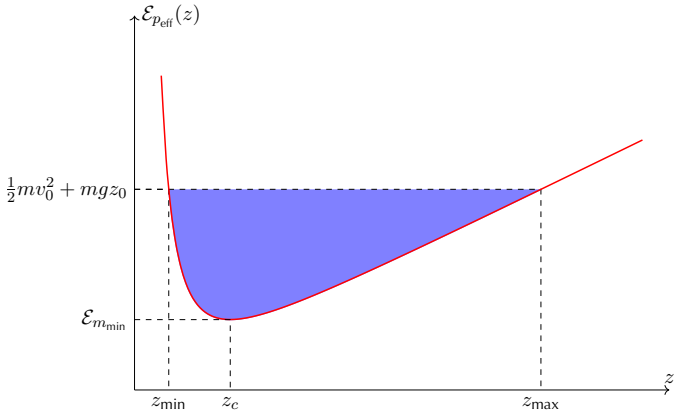
Or, la réaction normale du support ne travaille pas (puisqu'elle est orthogonale au vecteur déplacement élémentaire) et le poids est une force conservative, qui n'apparaît donc pas dans l'expression du théorème de l'énergie mécanique.
On obtient ainsi :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgz = \text{cte}$$

soit :

$$\frac{1}{2}m\tan^2(\alpha)\dot{z}^2 + \underbrace{\frac{L_z^2}{2m\tan^2(\alpha)z^2} + mgz}_{\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}(z)} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0$$

On se retrouve dans la situation du puits de potentiel représenté ci-dessous :



Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

La bille évolue dans un puits de potentiel, son état est lié, son altitude peut donc prendre des valeurs comprises entre $z_{\min}$ et $z_{\max}$.

3. La trajectoire peut être circulaire à condition qu'une seule altitude puisse être permise. Ceci est autorisé dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum d'énergie potentielle effective, soit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}}{\mathrm{d}z}(z_c) = 0 \Leftrightarrow -\frac{L_z^2}{m\tan^2(\alpha)z_c^3} + mg = 0$$

soit :

$$z_c = \sqrt[3]{\frac{L_z^2}{m^2\tan^2(\alpha)g}} = \sqrt[3]{\frac{z_0^2 v_0^2}{g}}$$

Comme l'altitude z_c n'a pas d'autre choix que d'être égale à sa valeur intiale z_0 pour avoir une trajectoire circulaire, on en déduit que

$$\boxed{v_0 = \sqrt{z_0 g}}$$

Par conséquent, l'énergie mécanique de la bille doit être égale à :

$$\boxed{\mathcal{E}_{m_{\min}} = \frac{1}{2}mz_0 g + mgz_0 = \frac{3}{2}mgz_0}$$

EXERCICE 4 Approche d'un astéroïde (⋆)

1. On se place dans la situation schématisée sur la *Figure 4*.

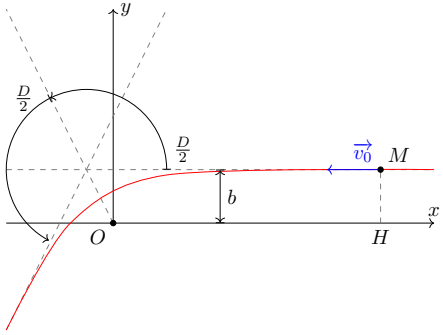


Figure 4 – Déviation de l'astéroïde

L'astéroïde M est soumis à une force centrale newtonienne conservative de la forme $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r}$. Le moment exercé en O par cette force (radiale) est nul.
Le théorème du moment cinétique appliqué à M au point O dans $\mathcal{R}$ s'écrit donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overset{\hookrightarrow}{0} \Rightarrow \boxed{\overset{\hookrightarrow}{\mathcal{L}}_O(M) = \text{cte}}$$

Le moment cinétique du point est donc conservé.
Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à M dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W(\overrightarrow{F}_{\text{NC}}) = 0 \rightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = \text{cte}}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

L'énergie mécanique du système est donc conservée.
On a donc :

$$\boxed{L_O = mr^2\dot{\theta} = mbv_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

2. L'énergie mécanique a pour expression :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{K}{r} + \text{cte}$$

soit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{\mathcal{G}mM_T}{r}}_{\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}(r)} + \text{cte}$$

3. À la distance minimale d'approche, $\dot{r} = 0$, d'où :

$$\frac{L_O^2}{2mr_{\min}^2} - \frac{\mathcal{G}mM_T}{r_{\min}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

soit :

$$0 = r_{\min}^2 + \frac{2\mathcal{G}M_T}{v_0^2}r_{\min} - b^2$$

La résolution de ce polynôme permet d'identifier une racine positive :

$$\boxed{r_{\min} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2} + \sqrt{\frac{\mathcal{G}^2M_T^2}{v_0^4} + b^2} = \frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{b^2v_0^4}{\mathcal{G}^2M_T^2}}\right)}$$

Le rayon minimal atteignable pour un paramètre d'impact non nul est lorsque $\overrightarrow{v_0} \to \overrightarrow{0}$, soit :

$$r_{\min} \to \frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2} \times \frac{1}{2}\frac{b^2v_0^4}{\mathcal{G}^2M_T^2} = \frac{v_0^2b^2}{2\mathcal{G}M_T} = \frac{L_O^2}{2\mathcal{G}m^2M_T}$$

Pour éviter toute collision, il faut donc que $\frac{L_O^2}{2\mathcal{G}m^2M_T} \geq R_T$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/