Mécanique

(Mécanique du solide)

L'essentiel

EXERCICE 1 Pendule asymétrique (⋆⋆)

Un objet de masse m est fixé sur une tige, très légère, solidaire d'un cylindre de masse négligeable. Ce cylindre de rayon R peut tourner sans frottements autour d'un axe horizontal. La distance de cet axe au mobile est notée ℓ. Un fil sans masse est enroulé autour du cylindre de telle sorte qu'il ne glisse pas. On fixe à l'extrémité libre du fil un objet de masse M. Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ, M se déplace verticalement de z.

Les variables θ et z sont des grandeurs algébriques définies sur la *Figure 1*.

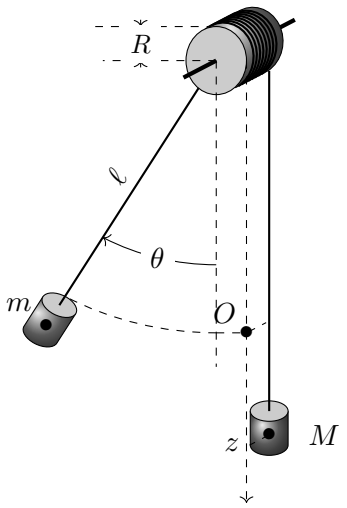


Figure 1 – Pendule asymétrique

On admet que le système mécanique constitué par l'ensemble des deux masses est conservatif et que son énergie potentielle est la somme des énergies potentielles de pesanteur des deux masses

1. Le fil étant inextensible, établir une relation entre R, θ et z si les deux masses sont à la même altitude lorsque $\theta = 0$.
2. En déduire l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ du système constitué des deux masses en fonction de m, M, R, ℓ et de $\dot{\theta}$. Montrer que l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ peut s'exprimer en fonction de la seule variable de position angulaire θ.
3. Si la masse M dépasse une valeur minimale M_0, on constate qu'il n'existe plus de position d'équilibre. Donner l'expression de cette valeur $M_0 = f(m, \ell, R)$.
4. Dans la suite, la masse M est inférieure à M_0. Montrer qu'il existe deux positions d'équilibre $\theta_{éq_1}$ et $\theta_{éq_2}$ telle que $\theta_{éq_2} = \pi - \theta_{éq_1}$. Interpréter géométriquement ce résultat. Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre en notant $\theta_{éq_1}$ la position d'équilibre stable.
5. Au voisinage de ces positions d'équilibre, on peut approximer $\mathcal{E}(\theta)$ par $\mathcal{E}(\theta) \simeq \mathcal{E}_0 + C(\theta - \theta_{éq})^2$. Justifier cette approximation parabolique, expliciter l'expression de la constante C et donner son signe pour $\theta_{éq} = \theta_{éq_1}$ et $\theta_{éq} = \theta_{éq_2}$.
6. Etablir l'équation du mouvement, en supposant que la position angulaire initiale θ_0 est voisine de $\theta_{éq_1}$ puis de $\theta_{éq_2}$. Justifier à nouveau le caractère stable ou instable de ces positions d'équilibre.
7. Le système est placé dans la position $\theta = 0$. Les masses sont lâchées sans vitesse initiale à la date $t = 0$. La *Figure 2* représente des trajectoires de phase pour $\ell \simeq 50$ cm, $R \simeq 5$ cm, $m \simeq 100$ g et pour trois valeurs différentes de la masse M, à savoir $M \simeq 650$ g, 720 g et 800 g. Associer, à chaque valeur de M, la trajectoire de phase correspondante et précisez son sens de parcours. Justifier votre choix en vous appuyant sur le graphe de $\mathcal{E}(\theta)$. Comment choisir le masse M pour obtenir une trajectoire de phase fermée en partant de ces conditions initiales ?

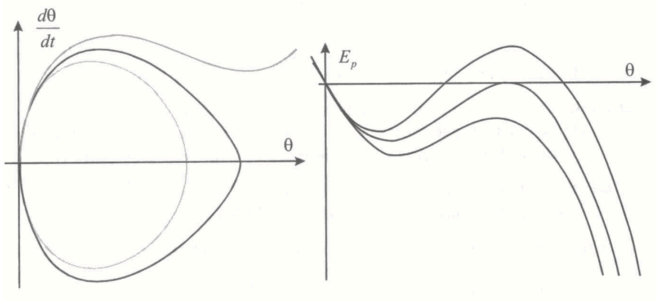


Figure 2 – Portrait de phase (à gauche) et énergie potentielle (à droite)

EXERCICE 2 Pendule pesant quasi-circulaire (⋆⋆⋆)

On considère le pendule pesant de la *Figure 3* constitué d'une liaison pivot en O sur laquelle est attaché un cylindre homogène auquel on retire une portion d'angle α.

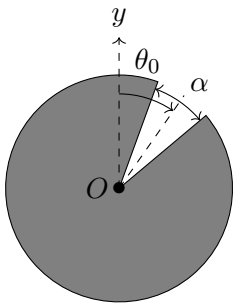


Figure 3 – Pendule pesant quasi-circulaire

1 Déterminer la période des oscillation. Que se passe-t-il si $\theta_0 = \pi$?

EXERCICE 3 Chute de cheminée (⋆⋆)

Lorsqu'une cheminée industrielle bascule puis s'écroule, on remarque qu'elle se casse toujours au même endroit.



Figure 4 – Dynamitage des cheminées de cokerie de Carling (Moselle)

1 Pourquoi ?

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/