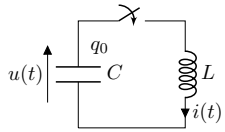
Électrocinétique

(Évolution d'un signal)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Circuit LC (⋆⋆)

On considère le circuit suivant :

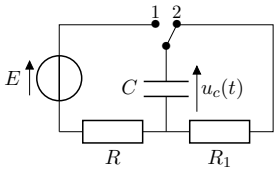


Le condensateur est initialement chargé avec une charge q_0. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Préciser les valeurs de $u(0^+)$ et $i(0^+)$. Justifier.
2. Établir les équations différentielles vérifiées par u et i. Commenter.
3. Identifier la période propre des oscillations du système.
4. Établir la loi d'évolution temporelle de $u(t)$ et $i(t)$.
5. Réaliser un bilan de puissance et calculer l'énergie stockée en moyenne dans la bobine et dans le condensateur. Commenter.

EXERCICE 2 Flash photographique

On considère le montage représenté ci-contre contenant un générateur de tension parfait de fem $E \simeq 6,00$ V, un condensateur de capacité $C \simeq 1,0 \times 10^3$ μF et deux conducteurs ohmiques de résistances $R \simeq 470\ \Omega$ et $R_1 \simeq 33\ \Omega$.



L'interrupteur est initialement en position (2).

1. L'interrupteur est basculé de la position (2) à la position (1) à l'instant $t = 0$. Donner la valeur de la tension $u_c(0^-)$ aux bornes du condensateur à l'instant précédant le basculement.
2. Justifier la continuité de la tension $u_c(t)$ aux bornes d'un condensateur puis donner la valeur de la tension $u_c(0^+)$ juste après basculement de l'interrupteur.
3. Préciser les lois de comportement du conducteur ohmique (de résistance R) et du condensateur de capacité C. Ces caractéristiques sont-elles établies en convention récepteur ou en convention générateur ? Justifier votre réponse.
4. Démontrer que la tension $u_c(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau}u_c(t) = \frac{E}{\tau}$$

où l'on exprimera et calculera τ en fonction des données du problème.

5. Résoudre méthodiquement l'équation différentielle pour établir l'expression temporelle de $u_c(t)$.
6. Représenter la tension $u_c(t)$ en vous aidant de l'inclinaison de la tangente à l'origine.
7. Déterminer la tension atteinte au bout de $t = 3\tau$, $t = 3\tau$ et $t = 5\tau$.

Une fois le condensteur chargé, il est possible de l'utiliser comme un générateur de tension, on bacule alors l'interrupteur en position (2). L'énergie électrique accumulée dans le condensteur se décharge alors progressivement dans le conducteur ohmique de résistance R_1.
On peut simuler le flash d'un appareil photographique en ajoutant une LED en série dans le circuit de décharge.

8. Représenter le schéma du montage en insérant la LED.
9. Préciser l'ordre de grandeur de la durée de l'éclairement de la LED.
10. Lors de la décharge du condensateur dans le conducteur ohmique (en l'abscence de LED).
    - **a.** Donner l'expression de l'intensité $i_1(t)$ qui traverse le conducteur ohmique de résistance R_1 au cours du temps.
    - **b.** Donner l'expression de l'énergie électrique $\mathcal{E}_{e_0}$ initialement stockée dans le condensateur et calculer sa valeur.
    - **c.** Établir un bilan de puissance et identifier l'expression de l'énergie électrique stockée dans le condensateur et la puissance Joule dissipée sous forme de chaleur dans le conducteur ohmique.
    - **d.** Préciser la valeur de l'énergie dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

L'essentiel

EXERCICE 3 Circuit RL (⋆)

On considère le circuit RL monté en parallèle selon le schéma de la *Figure 1*.

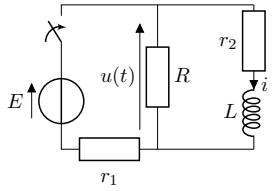


Figure 1 – Circuit électrique

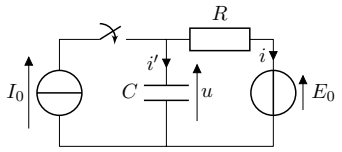
Un générateur de fem E et de résistance interne r_1 est branché en parallèle d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine réelle d'inductance L et de résistance interne r_2.

Initialement, la bobine n'est parcourue par aucun courant. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interupteur K.

1. Établir la loi d'évolution de $i(t)$ et déterminer le courant I en régime permanent dans la bobine. On posera τ la constante de temps du système.
2. Le courant d'intensité I est établi, on ouvre K à $t = 0$ (l'origine des temps est redéfinie). Déterminer la nouvelle loi donnant $i(t)$ et l'énergie dissipée par effet Joule dans les résistances. On notera τ' la nouvelle constante de temps du système.

EXERCICE 4 Circuit RC (⋆⋆)

On considère le circuit représenté sur le schéma ci-après, composé de deux générateurs. On ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Le condensateur est initialement chargé à $u(0^-) = u_1 < E_0$.



1. Calculer $u(0^+)$ et justifier le résultat obtenu.
2. Calculer $u(t)$ et $i(t)$. Commenter.
3. Le générateur de tension délivre maintenant une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$ et le générateur de courant un courant sinusoïdal $i_0 = I_0\sin(\omega t + \Phi)$, $\Phi \in [0;\pi]$. Calculer $u(t)$ en régime sinusoïdal.

EXERCICE 5 Décrément logarithmique (⋆⋆)

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ dans le circuit de la *Figure 2*.

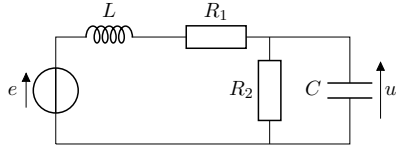


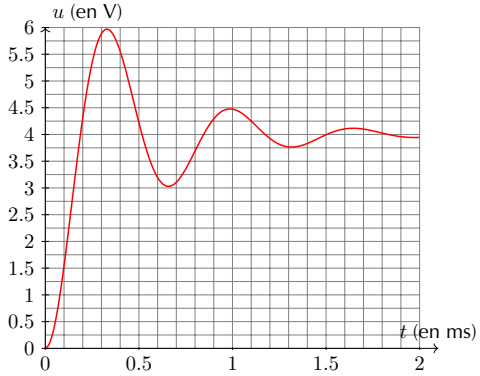
Figure 2 – Circuit électrique

1. Déterminer la valeur $u(\infty)$ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque la valeur de $e(t)$ est E, en dessinant un schéma en régime stationnaire.
2. Démontrer que :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\lambda\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2u(t) = \omega_0^2u(\infty)$$

et exprimer λ et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.

3. Définir et tracer un échelon de tension. Expliquer comment on le réalise expérimentalement.



4. On observe sur un oscilloscope la courbe $u(t)$ qui précède.
    - **a.** Déterminer la valeur numérique de la pseudo-période T.
    - **b.** Déterminer la valeur numérique du décrément logarithmique :

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t) - u(\infty)}{u(t+T) - u(\infty)}\right)$$

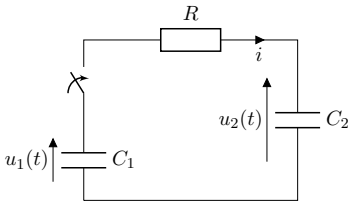
5. Exprimer la forme mathématique de $u(t)$ en fonction de λ, ω_0, $u(\infty)$ et t. On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration.
6. Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ.
7. Sachant que $R_1 \simeq 200\ \Omega$, $R_2 \simeq 5,0$ kΩ, $L \simeq 100$ mH, déterminer la valeur numérique de C.

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Décharge de deux condensateurs (⋆)

Un condensateur de capacité C_1 est chargé avec une tension E, puis, à $t = 0$, est relié, par fermeture de l'interrupteur K, à un circuit (R, C_2) série (le condensateur de capacité C_2 est initialement déchargé).

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/



1. Déterminer les variations du courant $i(t)$ de décharge du condensateur C_1.
2. Calculer la variation d'énergie $\Delta\mathcal{E}$ du système constitué par la résistance R et les deux condensateurs C_1 et C_2.
3. Démontrer que $|\Delta\mathcal{E}|$ est aussi l'énergie dissipée par effet Joule $\mathcal{E}_J$ dans la résistance R.
4. L'expression de $|\Delta\mathcal{E}|$ étant indépendante de R, que se passe-t-il lorsque R tend vers 0 ?

EXERCICE 7 Circuit RLC parallèle (⋆⋆)

On considère le circuit de la *Figure 3*. À l'instant $t = 0$, le générateur de courant impose que $i(t)$ passe de 0 à $\eta \simeq 10$ mA. Les composants sont choisis tels que $R \simeq 50\ \Omega$, $C \simeq 400$ nF et $L \simeq 10$ mH.

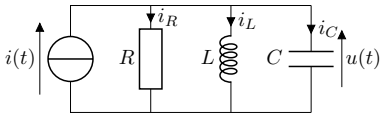


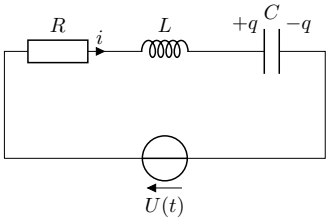
Figure 3 – Circuit RLC parallèle

1. Établir l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ dans ce circuit à $t > 0$.
2. Mettre cette équation sous forme canonique et donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.
3. Quel est le type d'évolution de u ?
4. Justifier qu'à l'instant $t = 0$, $i_L = 0$ A et $u = 0$ V.
5. En déduire l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$.
6. Représenter l'allure de $u(t)$ pour $t > 0$.

EXERCICE 8 Régime pseudo-périodique (⋆⋆)

On considère le circuit ci-dessous, que l'on soumet à un échelon de tension :

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t > 0 \end{cases} \qquad (1)$$



On définit $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

1. Expliquer pourquoi l'intensité i du courant et la charge q du condensateur sont tous les deux nuls à $t = 0^-$.
2. Pour $t > 0$, établir l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ (cf schéma pour la convention sur q).
3. Déterminer les valeurs de $q(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

On suppose que l'on a $\omega_0 > \alpha$.

4. Justifier que l'expression de $q(t)$ pour $t > 0$ est de la forme
$$q(t) = (q_1 \cos(\omega t) + q_2 \sin(\omega t))\, \mathrm{e}^{-\alpha t} + q_3$$
et établir les expressions de q_1, q_2, q_3 et ω en fonction de E, ω_0, α et C.
5. Représenter le plus soigneusement possible l'allure de $q(t)$.
6. Déterminer à la fin du régime transitoire (on pourra remarquer que le calcul de $i(t)$ n'est pas nécessaire) :
   - **a.** L'énergie $\mathcal{E}_{\text{généré}}$ qui a été fournie par le générateur au circuit,
   - **b.** L'énergie électromagnétique $\mathcal{E}_{\text{EB}}$ qui a été emmagasinée dans le condensateur et dans la bobine,
   - **c.** En déduire l'énergie $\mathcal{E}_{\text{J}}$ qui a été dissipée dans la résistance par effet Joule.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 1 Circuit LC (⋆⋆)

1. La tension u est **continue aux bornes du condensateur**, l'intensité i du courant est **continue à travers la bobine**.
2. La loi des mailles permet d'écrire :
$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + u = 0}$$
Or, $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, on en déduit que
$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0}$$
u et i vérifient la même équation différentielle.
3. La période propre des oscillations du système est $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$.
4. La résolution des équations différentielles ci-dessus permet d'écrire :
$$\boxed{u(t) = \frac{q_0}{C}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{i(t) = -\frac{q_0}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)}$$
5. Le bilan de puissance s'écrit en multipliant la loi des mailles par $i(t)$, soit :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) = 0$$
On a ainsi :
$$\boxed{\left\langle\frac{1}{2}Cu^2\right\rangle = \frac{q_0^2}{4C}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left\langle\frac{1}{2}Li^2\right\rangle = \frac{q_0^2}{4C}}$$
L'énergie $\mathcal{E} = \frac{q_0}{2C}$ initialement contenue dans le condensateur est conservée est en moyenne stockée équitablement entre les deux dipôles à la fermeture du circuit.

EXERCICE 2 Flash photographique

1. Initialement le condensateur est déchargé de sorte que $\boxed{u_c(0^-) \simeq 0\ \text{V}}$.
2. La puissance stockée dans le condensateur ne peut pas être infinie de sorte que $\mathcal{P}_{\text{élec}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right) \neq \infty$. Par conséquent, $\mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{1}{2}Cu_c^2$ est une fonction continue du temps, ce qui implique que u_c est une **fonction continue du temps**. On a donc $u_c(0^+) = u_c(0^-) \simeq 0$ V.
3. Les lois de comportement sont les suivantes :
   - Pour le conducteur ohmique (loi d'Ohm) : $\boxed{u_R(t) = Ri(t)}$ avec $u_R(t) = E - u_c(t)$.
   - Pour le condensateur : $\boxed{i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t)}$.

   Ces deux lois de comportement sont écrites en **convention récepteur** puisqu'il s'agit de dipôles récepteurs.
4. En appliquant la loi des mailles lorsque l'interrupteur est en position (1), on obtient :
$$E = u_R(t) + u_c(t) = Ri(t) + u_c(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t) + u_c(t)$$
On peut donc identifier $\boxed{\tau = RC \simeq 470 \times 1,0 \times 10^{-3} \simeq 4,7 \times 10^{-1}\ \text{s}}$.
5. La solution de l'équation différentielle s'écrit comme la somme de :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

- la solution générale de l'équation homogène : $u_c^{(G)}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.
- une solution particulière de l'équation avec second membre, cherchée sous la même forme que le second membre : ici constant. On pose donc $u_c^{(P)} = K$ et en réinjectant cette solution dans l'équation différentielle, on obtient $0 + K = E \Rightarrow \boxed{K = E}$.

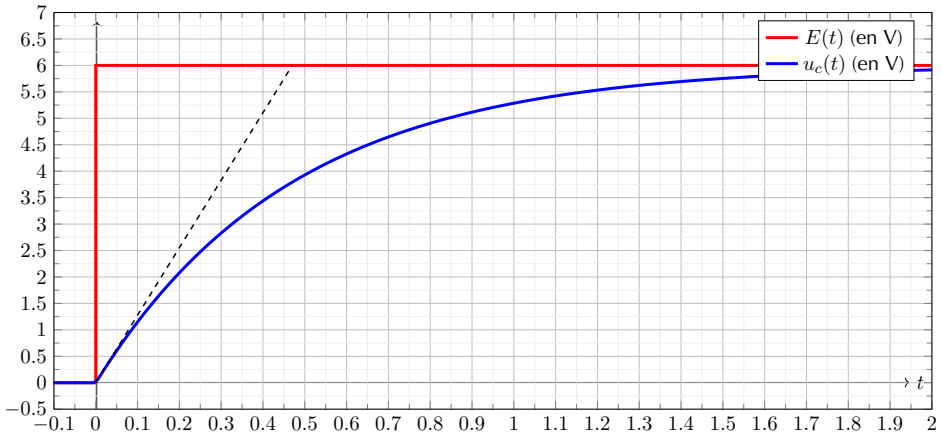
La solution est donc :

$$u_c(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec $u_c(0^+) = 0$ V $= E + A$, soit $A = -E$. On obtient ainsi :

$$u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

6 L'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur est représentée ci-dessous :



7 a. Au bout de $t = \tau$, 63% de la valeur de consigne est atteinte, soit $\boxed{u_c(\tau) \simeq 0,63 \times E \simeq 3,78 \text{ V}}$.

b. Au bout de $t = 2\tau$, 95% de la valeur de consigne est atteinte, soit $\boxed{u_c(2\tau) \simeq 0,95 \times E \simeq 5,70 \text{ V}}$.

c. Au bout de $t = 4\tau$, 99% de la valeur de consigne est atteinte, soit $\boxed{u_c(3\tau) \simeq 0,99 \times E \simeq 5,94 \text{ V}}$.

8 Il faut insérer la **LED pointant** vers le bas dans la branche la plus à droite du circuit.

9 La LED éclaire tant qu'il y a du courant qui la traverse : entre $6,00$ V et environ 2 V (dépend de sa couleur) : soit 4 V d'écart. On sait que sur la durée caractéristique du circuit τ', $4,02$ V sont chargés/déchargés. La LED éclaire donc sur une durée caractéristique de $\boxed{\tau' = R_1 C \simeq 33 \text{ ms}}$.

10 a. En établissant l'équation différentielle du circuit, on trouve $u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau'}}$ avec $\boxed{\tau' = CR_1 \simeq 33 \text{ ms}}$.

On en déduit que $i'(t) = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{E}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau'}}$ (en convention récepteur, donc i' traversant le condensateur de haut en bas).

b. L'énergie électrique emmagasinée initialement par le condensateur est $\boxed{\mathcal{E}_{e_0} = \frac{1}{2}CE^2 \simeq 18,00 \text{ mJ}}$.

c. L'équation différentielle vérifiée par le circuit est :

$$R_1 i'(t) + u_c(t) = 0$$

En multipliant par $i'(t)$, on obtient :

$$\boxed{R_1 i'^2(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2(t)\right)}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Cette équation signifie que la variation temporelle d'énergie électrique $\frac{1}{2}Cu_c^2(t)$ stockée dans le condensateur est dissipée par puissance Joule $R_1 i'^2(t)$ dans le conducteur ohmique.

d. D'après l'équation précédente, toute l'énergie dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique provient de l'énergie électrique stockée initialement dans le condenateur. On peut donc en déduire que l'énergie dissipée par effet Joule est :

$$\boxed{\mathcal{E}_J = -\mathcal{E}_e = -\frac{1}{2}CE^2 \leq 0}$$

(négative puisqu'il s'agit d'une énergie dissipée, perdue par le système).

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/