Ondes et signaux

(Introduction à la mécanique quantique)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Expérience de Millikan (⋆)

On considère le montage de cellule photoémissive représentée en *Figure 1*. La cathode K du montage, en césium, est éclairée par une lumière incidente de fréquence ϑ. Pour $\vartheta \geq \vartheta_S$, on observe une émission d'électrons depuis la cathode. Aucun phénomène n'est observé en deçà de la fréquence seuil ϑ_S.

1. Exprimer l'énergie d'un photon $\mathcal{E}_\phi$ en fonction de h et de sa fréquence ϑ.
2. Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ d'un électron de masse m_e et de vitesse $\overrightarrow{v_e}$.
3. Établir un bilan d'énergie sur le système {photon absorbé+électron extrait} en fonction de $\mathcal{E}_\phi$ et $\mathcal{E}_k$ sachant que l'extraction d'un électron de la cathode nécessite un apport énergétique appelé *travail d'extraction* W_S.
4. Exprimer le travail d'extraction W_S en fonction de h et de ϑ_s.
5. La *tension d'arrêt* U_0 est la tension U à imposer entre l'anode et la cathode pour n'observer plus aucun courant électrique dans le circuit. Exprimer U_0 en fonction de e, W_S, h et ϑ.
6. Millikan fait les relevés suivants. Que conclure ?

ν (10^{14} Hz)	5,0	6,0	7,5	10,0
U (V)	−0,19	−0,60	−1,22	−2,26

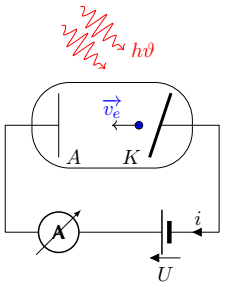


Figure 1 – Montage

Données :

- $c \simeq 3,00 \times 10^8$ m · s^{-1}.
- $e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ C.

EXERCICE 2 Taille de l'atome d'hydrogène (⋆)

On considère un atome d'hydrogène comme étant constitué d'un proton en son centre et d'un électron délocalisé sur une zone de taille r. On cherche à déterminer r afin de minimiser l'énergie moyenne de l'électron. On note m_e la masse de l'électron et $-e$ sa charge électrique.

1. Écrire et interpréter le *principe d'incertitude de Heisenberg*.
2. Déterminer l'incertitude Δx sur la position de l'électron. En déduire l'inceritude Δp_x sur sa quantité de mouvement.
3. L'énergie potentielle d'interaction électrostatique de l'électron avec le noyau est de la forme $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Démontrer qu'en ordre de grandeur, l'énergie mécanique de l'électron est :

$$\mathcal{E}_m(r) \sim \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

4. Identifier le rayon $r \mathrel{\hat{=}} a_0$ pour lequel l'énergie mécanique de l'électron est minimale.
5. Calculer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(a_0)$ correspondante (en électronvolt).

Données :

- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi} \times 10^{-7}$ F · m^{-1}.
- Charge électrique élémentaire $e \simeq 1,60 \times 10^{-19}$ C.
- Constante de Planck : $h \simeq 6,63 \times 10^{-34}$ J · s.
- Masse de l'électron : $m_e \simeq 9,1 \times 10^{-31}$ kg.

L'essentiel

EXERCICE 3 Expérience des fentes d'Young (⋆⋆)

L'expérience d'Young, représentée en *Figure 2*, est conduite avec des photons monochromatiques de longueur d'onde λ_0 au sens de de Broglie et on essaie de savoir « par quelle fente passe le photon ». La plaque percée des deux fentes est mobile dans son plan vertical.

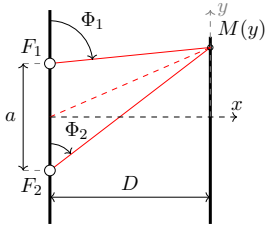
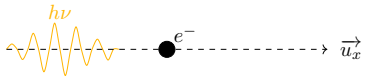


Figure 2 – Dispositif expérimental

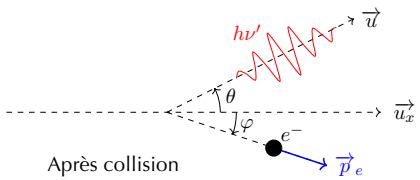
1. Soit i la distance (interfrange) entre le maximum central et le premier maximum secondaire. Exprimer i en fonction de a, D et λ_0 ($\lambda_0 \sim a \ll D$).
2. Montrer que l'impulsion transmise à la plaque parallèlement à Oy n'est pas la même suivant que le photon passe par F_1 ou par F_2 ($\Phi_i = (\overrightarrow{F_i M}, Oy)$).
3. En déduire la précision nécessaire sur la mesure de l'impulsion de la plaque afin de savoir par où est passé le photon.
4. Montrer que la position des franges sur l'écran est alors entachée d'une incertitude supérieure à l'interfrange i.

EXERCICE 4 Expérience de Compton (⋆⋆)

L'expérience de Compton (1923) a consisté à faire entrer en collision un photon de fréquence ν et un électron (de masse m_e).



Avant collision



Après collision

Les observations sont les suivantes :

- L'électron, initialement au repos, est animé d'une quantité de mouvement $\overrightarrow{p}_e \neq \overrightarrow{0}$ après la collision.
- Le photon incident est **diffusé**. Sa fréquence ν' diminue.

Le modèle corpusculaire élaboré précédemment permet une interprétation simple du phénomène : le photon incident a une énergie $\mathcal{E}_\phi = h\nu$ et une quantité de mouvement $\overrightarrow{p}_\phi = \frac{h}{\lambda}\overrightarrow{u_x}$.

L'électron vérifie la relation suivante : $\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ avec m la masse de l'électron, p sa quantité de mouvement, c la vitesse de la lumière dans le vide et $\mathcal{E}$ l'énergie totale de l'électron.

1. Démontrer la relation de Compton.

$$(\lambda' - \lambda) = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\theta))$$

EXERCICE 5 Le carotène (⋆⋆)

Certaines molécules organiques ayant une longue chaine linéaire, comme le β-carotène, contiennent des électrons qui ne sont pas attachés à un noyau particulier, mais peuvent au contraire se déplacer sur toute la longueur de la molécule par mésomérie.

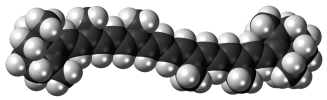


Figure 3 – Molécule de β-carotène

On modélise un tel électron, de masse $m \simeq 9,11 \times 10^{-31}$ kg, comme une particule qui se déplace librement sur un segment de droite, entre les abscisses $x = 0$ et $x = \ell$. L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ est nulle sur le segment et infinie partout ailleurs (particule confinée dans une « boîte »). Sa fonction d'onde $\psi(x)$ est alors liée à son énergie totale $\mathcal{E}$ par l'équation différentielle de *Schrödinger* stationnaire :

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}(x) = \mathcal{E}\psi(x)$$

où h est la constante de Planck.

1. On cherche tout d'abord à déterminer la fonction d'onde $\psi(x)$.
   a. Justifier brièvement que $\psi(x)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[0;\ell]$
   b. $\psi(x)$ étant une fonction continue, elle est donc nulle aux deux extrémités de la molécule : $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$. Montrer que la solution de l'équation différentielle est de la forme

$$\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

   où n est un entier et A_n une constante.
   c. Déterminer l'expression de A_n. Nommer la condition utilisée pour identifier son expression.
2. Donner l'expression des niveaux d'énergie $\mathcal{E}_n$ en fonction de m, ℓ, h et n.
3. Montrer, en détaillant votre raisonnement, que l'on obtient le même résultat pour l'énergie fondamentale $\mathcal{E}_1$ (à un facteur adimensionné près) comme conséquence du *principe d'indétermination* de *Heisenberg*.
4. Dans le β-carotène, ce sont les électrons des onze liaisons doubles qui se comportent comme des particules libres confinées sur une longueur $\ell = 1,83$ nm (22 électrons au total). Dans l'état fondamental de la molécule, ces électrons occupent les onze niveaux d'énergie les plus bas.
   a. Calculer les énergies $\mathcal{E}_{11}$ et $\mathcal{E}_{12}$ des niveaux $n = 11$ et $n = 12$. On donne $h \simeq 6,63 \times 10^{-34}$ J · s et $\mathcal{E}_1 \simeq 0,113$ eV.
   b. En déduire l'énergie, puis la longueur d'onde λ dans le vide, d'un photon absorbé par la molécule, lorsqu'un électron passe du niveau 11 au niveau 12. On donne $c \simeq 3,0 \times 10^8$ m · s^{-1}.
   c. Expliquer alors la couleur orangée des organismes contenant une grande quantité de cette molécule (carottes, citrouilles...).

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Interférences d'atomes froids (⋆)

En 1992, les physiciens japonais SHIMIZU et TAKUMA réalisaient une expérience d'interférences atomiques représentée en *Figure 4* : un nuage d'atomes de néon de masse molaire $M \simeq 20,12\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ est lâché sans vitesse initiale $h \simeq 76$ mm au dessus d'un écran percé de deux fentes parallèles, de largeur 2 μm et distantes de $e = 6,0\ \mu$m. Un détecteur MCP est située à une distance $D \simeq 113$ mm à l'aplomb du plan des fentes. Chaque point noir sur la plaque réceptrice représente l'impact d'un atome sur le détecteur.

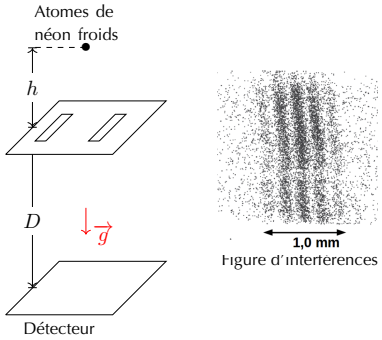


Figure 4 – Dispositif expérimental

1. En supposant que l'on peut traiter classiquement la chute des atomes de Néon, calculer la vitesse v_s de mouvement des atomes de Néon au niveau des fentes.
2. Vont-ils manifester un comportement (classiquement) ondulatoire ? Justifier votre réponse.
3. Expérimentalement, on observe la figure d'interférences représentée en *Figure 4* sur la plaque de détection. Mesurer l'interfrange i (la distance entre deux franges brillantes) de la figure d'interférence.
4. L'interfrange est lié à longueur d'onde des atomes de Néon par la relation :

$$i = \frac{h}{mv_s}\frac{D}{e}\frac{2(\sqrt{1+\alpha}-1)}{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2gD}{v_s^2}$$

Calculer la valeur théorique de i. Que penser du modèle ?

Données : $h \simeq 6,63 \times 10^{-34}$ J·s, $c \simeq 3,00 \times 10^{8}$ m·s^{-1}, $g \simeq 9,81$ m·s^{-2}, $\mathcal{N}_A \simeq 6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}.

EXERCICE 7 Diffraction de neutrons (⋆⋆⋆)

Une chaîne de N atomes ($N \gg 1$) disposés régulièrement sur une ligne est irradiée par un faisceau monocinétique de neutrons d'énergie $\mathcal{E}$. Un compteur situé à l'infini permet de dénombrer les neutrons diffusés sous un angle donné θ. Les neutrons interagissent principalement avec les noyaux des atomes, selon une interaction de contact (pseudo-potentiel de Fermi).

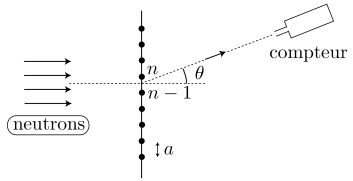


Figure 5 – Diffusion de neutrons par un cristal unidimensionnel

1. En raisonnant par analogie avec l'optique, trouver la dépendance angulaire de l'intensité du faisceau diffusé mesuré par le détecteur.
2. Montrer que, pour un angle de diffusion θ non nul donné, le taux de comptage présente des résonances aigües pour des énergies cinétiques de la forme :

$$\mathcal{E}_n = Cn^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exprimer la constante C.

3. Trouver la distance interatomique a sachant que la résonance $n = 1$, pour $\theta \simeq 45°$, se produit à $\mathcal{E} \simeq 25$ meV.
4. À partir de quelle énergie $\mathcal{E}_0$ les neutrons verront-ils la structure géométrique individuelle de chaque centre diffuseur ?

EXERCICE 8 Absorption de photons (⋆⋆)

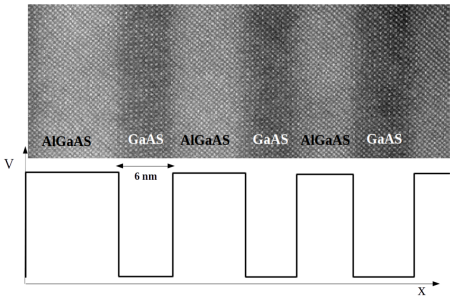


Figure 6 – Hétérostructure AℓGaAs – GaAs.

1. En utilisant une analogie avec les modes propres d'une corde vibrante, déterminer l'expression des énergies accessibles $\mathcal{E}_n$ d'une particule libre de masse m confinée dans un puits quantique de largeur L. On exprimera le résultat en fonction de m, de L, de la constante de Planck h et d'un entier naturel n non nul.
2. Ce puits quantique peut émettre ou absorber un photon de fréquence $\nu_{n,k}$ si l'écart $\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k$ entre deux niveaux d'énergie du puits vérifié la relation :

$$\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k = h\nu_{n,k}$$

   a. Quelle est la signification physique de la relation précédente ?
   b. Déterminer les fréquences $\nu_{2,1}$ et $\nu_{3,1}$, ainsi que les longueurs d'onde correspondantes $\lambda_{2,1}$ et $\lambda_{3,1}$ pour un puits à semi-conducteur à base d'arséniure de gallium (AsGa), de largeur $L \simeq 6,0$ nm et tel que $m \simeq 0,067m_e$ avec $m_e \simeq 9,1 \times 10^{-31}$ kg.
   c. À quel domaine du spectre appartient les longueurs d'onde des photons obtenues dans la question précédente ? Proposer des applications pratiques de tels puits quantiques.

EXERCICE 1 Expérience de Millikan (⋆)

1. L'énergie du photon se calcule à partir de la formule de Planck-Einstein

$$\boxed{\mathcal{E} = h\nu}$$

2. L'énergie cinétique de l'électron est :

$$\boxed{\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}m_e\overrightarrow{v_e}^2}$$

3. Le bilan d'énergie s'écrit :

$$\boxed{\underbrace{h\nu}_{\text{Énergie du photon}} = \underbrace{W_S}_{\text{Travail d'extraction}} + \underbrace{\mathcal{E}_k}_{\text{Énergie de l'électron}}}$$

4. Le travail d'extraction W_S est l'énergie nécessaire pour extraire un électron de la cathode : W_S coïncide donc avec l'énergie des photons incidents à la fréquence seuil $W_S = h\nu_S$.

5. L'énergie potentielle d'une particule de charge $-e$ évoluant dans un potentiel électrique V est $\mathcal{E}_p = -eV$. Une fois extrait, l'électron a une énergie mécanique qui se conserve (à l'échelle microscopique, il n'y a pas de forces non conservatives). La tension d'arrêt U_0 est la tension pour laquelle la vitesse des électrons au niveau de l'anode devient nulle. Au-delà, les électrons sont « trop » attirés par la cathode et plus aucun courant électrique ne circule.

   On a donc :

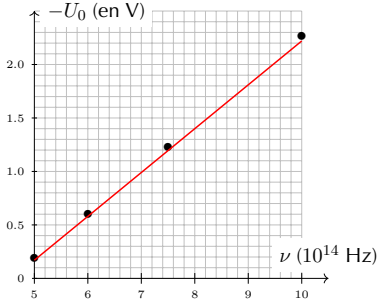
$$\underbrace{\frac{1}{2}m_e\overrightarrow{0}^2 + (-e)V_A}_{\mathcal{E}_m \text{ à l'anode}} = \underbrace{\frac{1}{2}m_e\overrightarrow{v_e}^2 + (-e)V_K}_{\mathcal{E}_m \text{ à la cathode}}$$

   Soit :

$$\boxed{U_0 = V_A - V_K = -\underbrace{\frac{m_e}{2e}\overrightarrow{v_e}^2}_{\mathcal{E}_k} = +\frac{W_S}{e} - \frac{h}{e}\nu}$$

6. On réalise une régression linéaire des mesures effectuées :

ν (10^{14} Hz)	5,0	6,0	7,5	10,0
U (V)	−0,19	−0,60	−1,22	−2,26



- L'alignement des points confirme le modèle choisi, et donc la relation de Planck-Einstein déterminant l'énergie d'un photon.
- La régression linéaire permet de déterminer :
  - $W_S = 1,88 \pm 0,01$ eV.
  - $h = 0,41 \times 10^{-14}$ eV · s $\simeq 6,6 \times 10^{-34}$ J · s.

EXERCICE 2 Taille de l'atome d'hydrogène (⋆)

1. Le principe d'incertitude de Heisenberg s'écrit :

$$\boxed{\sigma_x\sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}}$$

avec $\hbar$ la constante de Planck réduite, $\sigma_x = \int_{\mathbb{R}} x^2\psi(x)\mathrm{d}x$ l'écart-type de la fonction d'onde $x \to \psi(x)$ de la particule et σ_{p_x} l'écart-type de la fonction $p_x \to \psi(p_x)$.

☞ Le principe d'incertitude d'Heisenberg est souvent simplifié en précisant que l'on ne peut connaître simultanément la vitesse et la position d'une particule en même temps. En regardant l'expression de plus près, la mesure de l'état de la particule permet de donner une valeur unique x et p_x à l'état de la particule (donc avec précision arbitrairement infinie). Néanmoins, le comportement de plusieurs particules sera statistiquement régi par l'inégalité de Heisenberg.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. L'incertitude Δx sur la position de l'électron est $\Delta x \simeq r$. D'après le principe d'incertitude de Heisenberg, on a donc :

$$\boxed{\Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim \frac{\hbar}{r}}$$

3. L'énergie mécanique de la particule est :

$$\boxed{\mathcal{E}_m(r) = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

avec $p_x = \langle p_x\rangle + \Delta p_x = \Delta p_x$ puisque $\langle p_x\rangle = 0$ (symétrie du problème).
On a donc :

$$\mathcal{E}_m(r) \sim \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

4. Pour minimiser l'énergie mécanique de l'électron, on résoud l'équation $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}r} = 0$, soit :

$$\frac{-2\hbar^2}{2mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$$

$$\boxed{r \mathrel{\hat{=}} a_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{2me} \simeq 53 \text{ pm}}$$

Il s'agit du **rayon de Bohr**.

5. L'énergie mécanique minimale est ainsi :

$$\boxed{\mathcal{E}_m(a_0) \sim -\frac{e^4 m_e}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -\frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2} \simeq -13,6 \text{ eV}}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/