Thermodynamique

(Transformations d'un gaz)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Masse sur un piston (⋆)

Considérons une enceinte hermétique, diathermane, fermée par un piston de masse négligeable pouvant coulisser sans frottement. Cette enceinte contient un gaz supposé parfait. Elle est placée dans l'air, à température T_0 et pression p_0.

1. On place une masse m sur le piston. Déterminer les caractéristiques du gaz une fois l'équilibre thermique et mécanique atteint.
2. Déterminer le transfert thermique échangé Q et l'entropie créée.
3. On réalise la même expérience, mais en N étapes successives, par exemple en ajoutant du sable « grain à grain ». Déterminer l'entropie créée dans la limite $N \to \infty$.

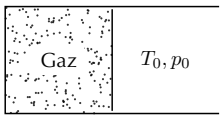
EXERCICE 2 Compresseur à deux étages (⋆)

On considère un compresseur faisant passer un gaz de 1 à 15 bar en deux étages séparés par un réfrigérant. Chaque étage est constitué d'un compresseur adiabatique réversible. L'étage basse-pression comprime le gaz parfait depuis l'état 1 ($p_1 = 1$ bar ; $T_1 = 293$ K) jusqu'à un état 2 (p_2, T_2) : le gaz est alors refroidi à pression constante jusqu'à l'état 3 ($p_3 = p_2$, $T_3 = 293$ K) et comprimé dans l'étage haute pression jusqu'à l'état 4 ($p_4 = 15$ bar). On donne $r = 4157\ \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $\gamma = 1,4$.

1. Exprimer le travail massique total de compression en fonction de γ, r, T_1, $\frac{p_2}{p_1}$ et $\frac{p_4}{p_2}$.
2. Déterminer la pression intermédiaire p_3 qui conduit au travail minimal.
3. Calculer le travail fourni par l'ensemble des deux parties mobiles au compresseur à un kilogramme de gaz transvasé et comparer au travail fourni par un compresseur constitué d'un seul étage.

EXERCICE 3 Transformation monotherme (⋆⋆)

Un gaz parfait se trouve dans un cylindre à l'intérieur duquel peut coulisser (sans frottement) un piston de masse négligeable. On note p_0 et T_0 la pression et la température de l'atmosphère extérieure. Initialement, le gaz, à la température $T_1 = T_0$, occupe un volume V_1.



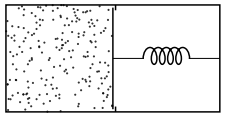
Données : $p_0 \simeq 1$ bar ; $V_1 \simeq 5\times10^{-3}$ m^3 ; $R \simeq 8,32\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$; $T_0 \simeq 293$ K et $\gamma = \frac{C_P}{C_V} \simeq 1,4$ (supposé indépendant de la température, C_P et C_V étant les capacités thermiques isobare et isochore).

1. La paroi du cylindre est conductrice de la chaleur (paroi diathermane). En appuyant sur le piston, un opérateur augmente très lentement la pression jusqu'à $p_2 \simeq 10$ bar. Dans l'état d'équilibre final, le gaz occupe un volume V_2 à la température T_2.
   a. Calculer V_2 et T_2.
   b. Exprimer littéralement puis calculer numériquement : la variation d'énergie interne ΔU, la variation d'enthalpie ΔH, le transfert thermique chaleur Q et le travail W échangés par le système gazeux avec le milieu extérieur.
   c. Quelle est la variation d'entropie ΔS_g du gaz au cours de l'opération ?
   d. On pose $F \triangleq U - TS$ et $G \triangleq H - TS$. Donner la relation entre la variation d'enthalpie libre ΔG et la variation d'énergie libre ΔF du gaz parfait.
2. La paroi du cylindre est toujours diathermane, mais l'opérateur, à l'équilibre initial (p_1, V_1, T_1), place sur le piston (de section s) une masse $M = \frac{(p_2-p_1)s}{g}$ (où g est l'intensité du champ de pesanteur).
   a. Reprendre les calculs de la *question* 1 **a.**, sachant que $p_2 \simeq 10$ bar.
   b. On note ΔS_a la variation d'entropie de l'atmosphère extérieure au cours de l'opération. Calculer ΔS_a. Que représente $\Delta S_g + \Delta S_a$? Commenter le signe de cette expression.

L'essentiel

EXERCICE 4 Piston et force conservative (⋆⋆)

On considère un piston calorifugé mobile dans un cylindre calorifugé horizontal de section constante $S \simeq 500$ cm^2. Le compartiment de gauche contient $n \simeq 0,01$ mol d'un gaz parfait de coefficient $\gamma \simeq 1,40 \simeq \frac{7}{5}$ et le compartiment de droite est soumis à un vide poussé. Le piston est relié par un ressort de raideur $k \simeq 1044\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.



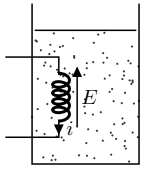
1. Initialement, le piston est coincé par une butée B, le ressort n'est pas tendu, la pression du gaz vaut $p_0 \simeq 0,241$ bar et sa température $T_0 \simeq 290$ K. Calculer le volume V_0 occupé initialement par le gaz.
2. On supprime la butée B. Le système évolue vers un nouvel état d'équilibre. On cherche à déterminer l'allongement final du ressort, x_F, le volume final du gaz, V_F , sa pression finale, p_F, sa température finale, T_F, et le travail W qu'il a reçu.
   a. En appliquant la deuxième loi de Newton au piston au repos dans l'état final, donner la relation entre p_F, S, k et x_F.
   b. Quelle est l'expression de l'équation d'état du gaz parfait dans l'état final ?
   c. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au gaz parfait (en fait {gaz parfait+piston}) et en déduire une relation entre T_F, T_0, n, γ, k et x_F.
   d. Quelle est la relation liant le volume final V_F avec V_0, x_F et S ?
   e. Déduire des quatre équations précédentes que la pression p_F est solution de l'équation :

$$p_F^2 + \frac{5kV_0}{6S^2}p_F - \frac{5k}{6S^2}\times nRT_0 = 0$$

   f. En déduire les valeurs des grandeurs recherchées.

EXERCICE 5 Chauffage électrique (⋆)

Soit un système piston-cylindre contenant initialement $V_1 \simeq 0,50$ m^3 d'azote à $p_1 \simeq 400$ kPa et à $T_1 \simeq 27$ °C. L'élément chauffant électrique est allumé, et un courant d'intensité $I \simeq 2,0$ A y circule pendant $\tau \simeq 5,0$ min sous la tension $E \simeq 120$ V.



L'azote se détend de manière isobare. Au cours de cette transformation, le gaz cède aux parois et au piston un transfert thermique $Q_{\text{gaz}\to\text{parois}} = 2800$ J.

1. Déterminer la température finale T_2 de l'azote.

Données :

- $M(\text{N}_2) \simeq 28,0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$;
- Capacité thermique massique à pression constante du diazote : $c_p \simeq 1,039\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
- Constante des gaz parfaits $R \simeq 8,314\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

EXERCICE 6 Compression étagée (⋆⋆)

On souhaite comprimer de manière quasi-statique une mole gaz parfait diatomique d'une pression $p_0 \simeq 1$ bar à une pression $p_1 \simeq 10$ bar. Sa température initiale est $T_0 \simeq 300$ K. Chaque compression sera considérée suffisamment lente pour être quasi-statique mais assez rapide pour éviter tout transfert thermique avec l'extérieur. On effectue la compression du gaz en une seule étape.

1. Représenter la transformation dans le diagramme de Clapeyron.
2. Déterminer les variables d'état pour le gaz dans son état final ainsi que le travail fourni.

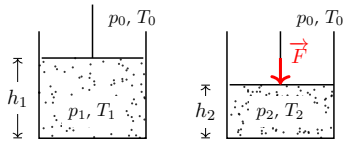
On effectue une première compression jusqu'à une pression intermédiaire p, puis on maintient cette pression jusqu'à l'équilibre thermodynamique du gaz avec l'extérieur à la température T_0. On effectue alors une seconde compression pour atteindre l'état final.

3. Représenter la transformation dans le diagramme de Clapeyron.
4. Exprimer le travail fourni au gaz.
5. En déduire la valeur de p permettant de minimiser le travail fourni.
6. On considère désormais une très grande quantité de compressions successives décrites à la question précédente. Vers quel type de transformation tend-on alors ? Quel sera par conséquent le travail fourni ?

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Compression irréversible (⋆⋆)

Un cylindre vertical de section S est fermé par un piston horizontal de masse négligeable, mobile sans frottement.



Une masse m d'air (considéré comme un gaz parfait de masse molaire M) est enfermée dans le cylindre, à la température initiale T_1 et à la pression initiale $p_1 = p_0$ (p_0 note la pression ambiante supposée constante).

R est la constante des gaz parfaits et γ note le rapport des capacités thermiques à pression et à volume constant.

Données : $S \simeq 100$ cm^2 ; $m \simeq 7,25$ g ; $M \simeq 29\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $R \simeq 8,314\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$; $T_1 \simeq 300$ K ; $p_0 \simeq 1$ bar ; $\gamma \simeq 1,4$.

1. Calculer V_1, le volume initial de l'air, et la hauteur h_1 (distance entre le piston et le fond du cylindre).
2. Exprimer la variation élémentaire d'entropie d'une masse m de gaz parfait, au cours d'une transformation quasistatique, en fonction de m, R, M, γ, $\frac{\text{d}T}{T}$ et $\frac{\text{d}V}{V}$.

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

Les parois du cylindre ainsi que le piston sont diathermanes, ce qui signifie qu'ils autorisent les transferts thermiques (on dit aussi qu'ils sont « perméables à la chaleur »). L'ensemble du dispositif se trouve dans une atmosphère maintenue à la température $T_a = T_1 \simeq 300$ K. On applique brutalement la force $F \simeq 1000$ N sur le piston. On appelle p_2 et V_2 la pression et le volume de l'air lorsque celui-ci atteint l'équilibre thermique avec le milieu extérieur.

3 **a.** Calculer le taux de compression $\tau = \frac{p_2}{p_1}$ et la hauteur h_2 finale.

b. Calculer le travail W reçu par l'air au cours de l'évolution $1 \to 2$.

c. Calculer la variation d'entropie ΔS_{air} de l'air pour cette évolution. Le signe de cette variation est-il « choquant » ?

d. Calculer, pour cette même évolution, la variation d'entropie ΔS_{ext} du milieu extérieur. En déduire la variation d'entropie de l'univers {air+extérieur} : $\Delta S_\infty = \Delta S_{\text{air}} + \Delta S_{\text{ext}}$. Justifier son signe.

EXERCICE 8 Turbine à gaz (⋆⋆)

On considère une turbine à gaz émettant des gaz de combustion assimilés à des gaz parfaits de constante spécifique $r = 383\ \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et de coefficient de Laplace $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,48$. Ces gaz de combustion ont été produits à une pression $p_1 = 16,05$ bar et une température $T_1 = 780$ K, qui sont les conditions à l'entrée de la turbine. La turbine est parfaitement calorifugée et opère une détente des gaz de combustion, avec production d'un travail extérieur cédé aux aubages mobiles de la machine. Ce travail est appelé **travail indiqué** de la turbine. On néglige les énergies cinétique et potentielle de pesanteur, ainsi que leurs variations, dans toute l'étude demandée. On mesure à la sortie une pression $p_2 = 1,013$ bar et une température $T_2 = 400$ K.

1 Calculer le travail indiqué massique fourni par les gaz de combustion à la turbine.

2 Quel doit être le débit massique de gaz traversant la turbine pour avoir une puissance indiquée $\mathcal{P}_i = 20,0$ MW ?

3 Calculer la variation d'entropie massique $s_2 - s_1$ des gaz à la traversée de la turbine.

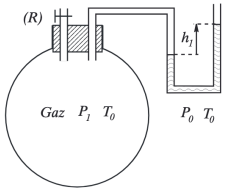
4 Représenter schématiquement l'allure de l'évolution sur un diagramme entropique (T, s). En admettant que l'évolution $1 \to 2$ est représentée par un segment de droite, calculer l'aire du trapèze délimité par le segment $1 \to 2$ et sa projection sur l'axe des entropies. Donner une interprétation physique de cette aire.

5 On modélise la transformation que subissent les gaz de combustion dans la turbine en utilisant une loi approchée polytropique de forme $pv^k =$ cte coïncidant aux états 1 et 2 avec la transformation réelle. Calculer l'exposant k de cette transformation.

6 Le travail cédé à la traversée de la turbine par toutes les forces de pression (amont, aval et intérieures) est appelé travail de transvasement. Calculer le travail de transvasement polytropique pour l'unité de masse de gaz traversant la machine (et évoluant selon la loi polytropique). Comparer avec la *question* 1 et interpréter la différence des travaux calculés dans ces deux questions. En déduire la valeur de q_f lorsque l'on utilise le modèle polytropique pour les calculs.

EXERCICE 9 Expérience de Clément-Desormes (⋆⋆⋆)

On considère un ballon rempli d'un gaz parfait à une pression légèrement supérieure à la pression atmosphérique P_0 : le liquide manométrique dans le tube en U présente une dénivellation h_1.



On ouvre le robinet pendant une durée brève, la dénivellation du liquide devenant nulle. Le robinet fermé, on attend que s'établisse l'équilibre thermique : celui-ci correspond à une dénivellation h_2 du liquide.

1 Montrer que : $\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$.

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

EXERCICE 1 Masse sur un piston (⋆)

1 L'équilibre mécanique de la paroi impose une résultante des forces nulle :

$$-mg + pS - p_0 S = 0 \Rightarrow \boxed{p = p_0 + \frac{mg}{S}}$$

L'équilibre thermique final impose :

$$\boxed{T = T_0}$$

2 Le transfert thermique Q est d'après le premier principe :

$$Q = \Delta U - W = -\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)(V_F - V_I) = -\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{mg}{Sp_0}} - 1\right)V_0 \Rightarrow \boxed{Q = -\frac{mg}{S}\frac{nRT_0}{p_0}}$$

La variation d'entropie ΔS :

$$\Delta S = -nR\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

et l'entropie échangée $S^{\text{éch}}$ est :

$$S^{\text{éch}} = \frac{Q}{T_0} = -\frac{mg}{S}\frac{nR}{p_0}$$

soit une entropie créée :

$$\boxed{S^{\text{cr}} = \Delta S - S^{\text{éch}} = \frac{mg}{S}\frac{nR}{p_0} - nR\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)}$$

3 Dans la deuxième expérience, il faut remplacer m par $\frac{m}{N}$ à chaque étape, soit :

$$Q' = \sum_{i=1}^{N} -\frac{mg}{SN}\frac{nRT_0}{p_0} = Q$$

et

$$S^{\text{cr}'} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{mg}{NS}\frac{nR}{p_0} - nR\ln\left(1 + \frac{mg}{NSp_0}\right)\right)$$

Comme $\frac{mg}{NS} \to 0$ pour $N \to +\infty$, on peut écrire :

$$S^{\text{cr}'} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{mg}{NS}\frac{nR}{p_0} - nR\left(\frac{mg}{NSp_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{NSp_0}\right)^2 + \circ\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)\right) = \frac{nRm^2g^2}{2N^2S^2p_0^2} + \circ\left(\frac{1}{N^2}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La transformation, réalisée lentement, tend vers une transformation réversible.

➲ Source : E. Thibierge

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

EXERCICE 2 Compresseur à deux étages (⋆)

1 Le gaz est supposé parfait, sa transformation est adiabatique ($Q = 0$) réversible.
La loi de Laplace s'écrit : $pV^\gamma = \text{cte}$, $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$ et $p^{1-\gamma}V^\gamma = \text{cte}$ avec $\gamma \simeq 1,4$ (gaz diatomique), on peut calculer entre deux états 1 et 2 :

$$\boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

Le premier principe s'écrit :

$$\Delta u = \underbrace{\int_i^f \mathrm{d}u}_{\text{Quasistatique}} = \underbrace{\int_i^f c_v \mathrm{d}T}_{\text{Loi de Joule}} = \underbrace{\frac{r\gamma}{\gamma-1} T_1 \left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)}_{\text{Relation de Mayer}} = \underbrace{w + q}_{\text{Premier principe}}$$

On a donc :

$$\boxed{w_{12} = \frac{rT_1}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)}$$

Pour deux compressions successives, le travail massique de compression total w sera donc :

$$\boxed{w = w_{12} + w_{34} = \frac{rT_1}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right) + \frac{rT_1}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p_2}{p_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)}$$

2 On cherche à résoudre l'équation $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}p_3} = 0$, on pose $\beta = \frac{1-\gamma}{\gamma}$. On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_3}\left(p_3^{-\beta} p_1^{\beta} + p_4^{-\beta} p_3^{\beta}\right) = 0 \Rightarrow \beta\left(p_3^{-\beta-1} p_1^{\beta} - p_4^{-\beta} p_3^{\beta-1}\right) = 0$$

soit :

$$\frac{p_3^{-\beta-1}}{p_3^{\beta-1}} = \frac{p_4^{-\beta}}{p_1^{\beta}} \Leftrightarrow p_3^{2\beta} = (p_1 p_4)^{\beta} \Rightarrow \boxed{p_3 = \sqrt{p_1 p_4}}$$

3 Le travail de compression dans un compresseur à double étage est alors :

$$\boxed{W = W_1 + W_2 = \frac{2mrT_1}{\gamma-1}\left(\left(\sqrt{\frac{p_1}{p_4}}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right) \simeq 2877 \text{ kJ}}$$

En comparaison, dans un compresseur à simple étage :

$$\boxed{W = \frac{mrT_1}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p_1}{p_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right) \simeq 3556 \text{ kJ}}$$

EXERCICE 3 Transformation monotherme (⋆⋆)

1 a. La compression étant lente, l'équilibre thermique impose $\boxed{T_2 = T_0}$. En fin de compression, le volume vérifie donc l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\boxed{V_2 = \frac{nRT_0}{p_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2} \simeq 0,5 \text{ L}}$$

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

b. La variation d'énergie interne est donc nulle si le gaz est parfait, car d'après la première loi de Joule :

$$\boxed{\Delta U = C_v \Delta T = 0}$$

La variation d'enthalpie ΔH est également nulle car d'après la deuxième loi de Joule :

$$\boxed{\Delta H = C_p \Delta T = 0}$$

Le travail reçu est :

$$\boxed{W = -\int p\mathrm{d}V = -\int nRT\frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = p_1 V_1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \simeq 1,15 \text{ kJ}}$$

Le transfert thermique vérifie :

$$\boxed{Q = \Delta U - W \simeq -1,15 \text{ kJ}}$$

c. La variation d'entropie ΔS_g du gaz au cours de l'opération est :

$$\Delta S_g = \int \frac{\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V}{T} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta S_g = \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \simeq -3,93 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}}$$

d. On peut établir la troisième et quatrième identité thermodynamique à partir des deux premières :

$$\mathrm{d}F = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T \quad \text{et} \quad \mathrm{d}G = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T$$

soit :

$$\mathrm{d}F = -p\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T \quad \text{et} \quad \mathrm{d}G = V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T$$

En faisant la différence des deux équations on obtient :

$$\mathrm{d}G - \mathrm{d}F = V\mathrm{d}p + p\mathrm{d}V = \mathrm{d}(pV)$$

En intégrant, on obtient ainsi :

$$\boxed{\Delta G = \Delta F + \Delta(pV)}$$

Ici, le gaz parfait vérifie $pV = nRT$. Comme la transformation est isotherme, on obtient $\boxed{\Delta F = \Delta G}$.

2 a. Le piston chute brutalement jusqu'à atteindre sa position d'équilibre mécanique. La compression étant très rapide, les échanges thermiques n'ont pas le temps d'avoir lieu : la transformation est adiabatique. De plus, l'absence de frottement revient à considérer la transformation réversible.
La transformation est donc isentropique et les lois de Laplace sont appliquables. La température T_1' en fin de compression est :

$$\boxed{T_1' = T_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \simeq 566 \text{ K}}$$

Après un temps de relaxation, on obtient de nouveau $\boxed{T_2 = T_0}$.
Le transfert thermique devient ainsi :

$$Q = -W = p_2(V_2 - V_1) \simeq -4,50 \text{ kJ}$$

avec $V_2 = V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \simeq 5,0 \times 10^{-4}$ m^3 une fois l'équilibre thermique atteint.

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

b. La variation d'entropie de l'atmosphère extérieur est ainsi :

$$\boxed{\Delta S_a = \int \frac{-\mathrm{d}U + p_2 \times (-\mathrm{d}V)}{T_0} = \frac{W}{T_0} \simeq 15,36 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}}$$

Il faut au choix considérer une pression équivalente p_2 du fait du chargement du piston avec la masse m, ou bien considérer une transformation isotherme réversible de l'atsmophère.
L'univers étant un système fermé, $\Delta S_g + \Delta S_a$ correspond à l'entropie créée dans l'univers :

$$\boxed{\Delta S_g + \Delta S_a \simeq 11,43 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$$

L'entropie créée dans l'atmosphère est positive, ce qui est conforme au second principe de la thermodynamique et traduit l'irréversibilité de la transformation de compression.

➲ **Source : J. Ph. Qadri**

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.