Induction

(Induction de Lorentz-de Neumann)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Pendule électromagnétique (⋆)

Une tige conductrice OA, homogène, de masse m et de longueur ℓ, est mobile en rotation autour d'un axe horizontal Δ, passant par son extrémité O. On note $J = \frac{m\ell^2}{3}$ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Oz.

Un bain de mercure permet de faire circuler un courant stationnaire d'intensité $i(t)$ dans la tige qui est de plus soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme B_0, parallèle à Δ. On négligera les frottements. On note α l'angle entre la verticale et la direction de la tige.

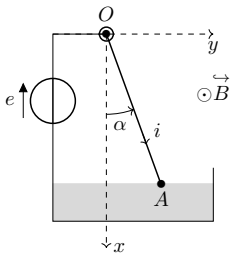
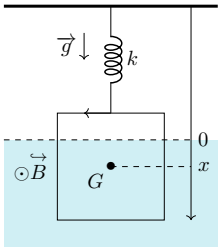


Figure 1 – Dispositif expérimental

1. Citer la loi de Lenz et la loi de Faraday.
2. Quelles sont les trois forces s'exerçant sur la tige ? Déterminer les expressions de leurs moments par rapport à Δ.
3. Déterminer l'expression de α lorsque la tige est à l'équilibre, $\alpha_{éq}$, en fonction de m, g, ℓ, i et B.
4. Proposez une application numérique de $\alpha_{éq}$ pour $i \simeq 1{,}0$ A, $B_0 \simeq 0{,}1$ T, $\ell \simeq 10$ cm, $m \simeq 100$ g et $g \simeq 9{,}81$ m · s^{-2}.
5. Établir l'équation horaire de $\alpha(t)$ lorsque le pendule initialement non parcouru par un courant est soumis à un échelon de courant vérifiant $i(t) = I$ pour $t \geq 0$ et $i(t) = 0$ pour $t < 0$.

EXERCICE 2 Oscillations d'un cadre (⋆⋆)

Un cadre de cuivre carré filiforme, de résistance R, d'inductance propre négligeable, de côté a, de masse m, est accroché à un ressort vertical de raideur k, de masse négligeable.



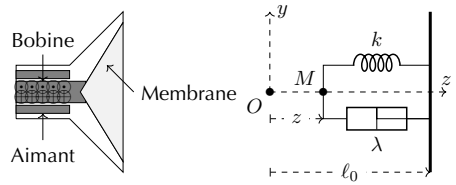
Le plan du cadre est vertical et, à l'équilibre, la moitié inférieure du cadre est située dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, stationnaire et perpendiculaire au cadre. On note $\vec{g} = g\,\vec{u_x}$ l'accélération de la pesanteur. On abaisse le cadre de $\frac{a}{2}$ et on le lâche sans vitesse initiale. On repérera sa position par l'abscisse $x(t)$ de son centre G qui vaut 0 à l'équilibre et est toujours comprise entre $-\frac{a}{2}$ et $+\frac{a}{2}$.

1. Exprimer l'intensité i du courant circulant dans le cadre en mouvement en fonction de B, a, R et $\frac{dx}{dt}$.
2. Quelle relation a-t-on entre m, g, k et X_0, l'allongement du ressort à l'équilibre ?
3. Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
4. On donne $k \simeq 0{,}40$ N · m^{-1}, $B \simeq 0{,}10$ T, $R \simeq 0{,}50$ mΩ, $m \simeq 50{,}0$ g, $a \simeq 10{,}0$ cm. Déterminer le facteur de qualité de cet oscillateur. En déduire l'allure de $x(t)$.

L'essentiel

EXERCICE 3 Haut parleur électromécanique (⋆⋆)

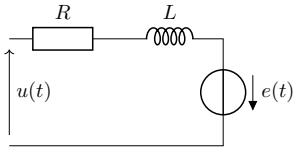
Un haut-parleur électrodynamique, schématisé ci-dessous, est constitué d'un châssis sur lequel est fixé le circuit magnétique. Sur cet ensemble rigide est fixé l'élément actif du haut-parleur : l'équipage mobile formé de la membrane et de la bobine mobile. La liaison avec le châssis est assurée, près du centre par le spider, pièce de toile rigidifiée par du plastique et qui joue le rôle d'un ressort et sur le pourtour par une suspension périphérique. L'ensemble de la suspension assure le rappel vers la position d'équilibre et le guidage en translation parallèlement à l'axe $z'z$. Le circuit magnétique, constitué d'aimants permanents, génère un champ magnétique B radial et uniforme ($B \simeq 1{,}05$ T) dans l'entrefer. La longueur totale du bobinage de la bobine mobile vaut $\ell \simeq 3{,}81$ m. La masse de l'équipage mobile vaut $m \simeq 4{,}0$ g.



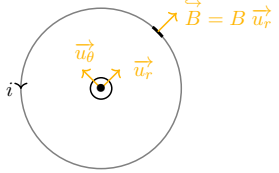
PARTIE A : Étude temporelle :

On applique aux bornes de la bobine une tension variable $u(t)$. La bobine est alors traversée par un courant d'intensité $i(t)$ et la membrane se déplace avec la vitesse $v(t)$.

1. Justifier précisément l'apparition d'une f.é.m. induite $e(t)$ aux bornes de la bobine.
2. Le schéma électrique équivalent de la bobine est représenté ci-dessous. Donner la relation qui lie $u(t)$ à $i(t)$, $i'(t) = \frac{di}{dt}(t)$ et $e(t)$. Que représente chacun des termes de cette équation dite électrique ? Pour la suite du problème, on posera $e(t) = -v(t)B\ell$.



3. Donner l'expression de la force élémentaire de Laplace $d\vec{F_L}$ conducteur de longueur $d\ell$ en fonction de $i(t)$, $d\ell$, B et $\vec{u_z}$.



4. Écire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'ensemble mobile. On notera $z = 0$ la position d'équilibre du système.
5. En déduire une relation liant $i(t)$ à $z(t)$ et ses dérivées.

PARTIE B : Régime sinusoïdal forcé :

La tension appliquée est supposée sinusoïdale, de fréquence f : $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi f$. Nous utiliserons le formalisme complexe qui, à toute fonction sinusoïdale du type $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$ associe la fonction complexe $\underline{a} = A_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ avec $j^2 = -1$.

6. Exprimer l'impédance $\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}(j\omega)}{\underline{i}(j\omega)}$ du haut-parleur.

Cette impédance $\underline{Z}(\omega)$ correspond à la mise en série de deux impédances : l'une $\underline{Z_e}(\omega)$, appelée impédance propre, qui ne contient que des termes relatifs au circuit électrique et l'autre $\underline{Z_m}(\omega)$, appelée impédance motionnelle, qui ne dépend que des caractéristiques mécaniques du système.

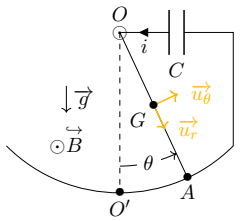
7. Préciser les expressions de $\underline{Z_e}(\omega)$ et $\underline{Z_m}(\omega)$.
8. Montrer que l'admittance motionnelle $\underline{Y_m}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Z_m}(j\omega)}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Y_m}(j\omega) = jC_m\omega + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega}$$

9. Préciser les expressions de C_m, L_m et R_m en fonction de ℓ, B, k, m et λ. On donne $k \simeq 1250$ N · m^{-1} et $\lambda \simeq 1{,}0$ kg · s^{-1}, calculer C_m, L_m et R_m.
10. Proposer un schéma électrique équivalent de l'impédance $\underline{Z}(\omega)$ du haut-parleur.

EXERCICE 4 Pendule et forces de Laplace (⋆⋆)

Une tige métallique homogène OA, de masse m et de longueur ℓ, peut tourner autour d'un axe horizontal Oz. La liaison au niveau de son extrémité fixe O est considérée comme parfaite. L'extrémité mobile A glisse sans frottement sur un profil circulaire, de sorte qu'à chaque instant l'ensemble tige-profil circulaire assure la fermeture d'un circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C, de la tige OA et de fils électriques. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et constant : $\vec{B} = B\,\vec{u_x}$ dirigé suivant l'axe de rotation Oz.



1. Justifier qualitativement l'apparition du courant $i(t)$. Expliquer le fonctionnement du système.
2. Déterminer, dans la base locale $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ l'expression de la force de Laplace $\vec{F}_L$ s'exerçant sur la tige mobile. Quel est son point d'application ?
3. Déterminer la puissance $\mathcal{P}_L$ de la force de Laplace en fonction de C, B, l, $\dot{\theta}$ et $i(t)$.
4. En utilisant la relation de couplage électromécanique, déterminer la force électromotrice d'induction e qui apparaît dans le circuit.

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

5. On néglige les chutes de tension dans les parties résistives du circuit ainsi que tout phénomène d'auto-induction. Représenter le schéma électrique équivalent et montrer que l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit s'écrit $i(t) = \frac{CB\ell^2}{2}\ddot{\theta}$.
6. Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Oz est $J_{Oz} = \frac{1}{3}m\ell^2$. En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation du mouvement de la tige.
7. En déduire que la pulsation des petites oscillations de la tige s'écrit : $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{\frac{2}{3}m\ell + \frac{1}{2}CB^2\ell^3}}$.

EXERCICE 5 Oscillations d'une barre (⋆⋆)

On considère le dispositif de la *Figure 2*. Une barre homogène de masse m est fixée par une liaison glissière à deux rails verticaux T_1 et T_2 espacés d'une distance a, de sorte que la barre ne peut se déplacer que selon l'axe vertical orienté vers le bas Oz. L'accélération de pesanteur est notée $\vec{g}$ et est orientée selon $\vec{e_z}$.

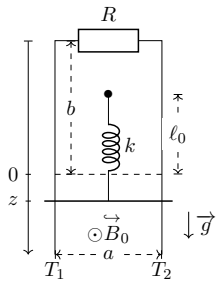


Figure 2 – Schéma du montage.

On néglige toute force au niveau des liaisons glissières. En revanche, un contact électrique sur les liaisons rend possible la circulation d'un courant dans le circuit fermé par une résistance R représenté sur le schéma. On négligera la résistance électrique des tiges et celle de la barre par rapport à R.

La barre est par ailleurs accrochée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k, dont l'autre extrémité est fixe (repérée par la coordonnée z_A), et est plongée dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B_0} = B_0\vec{e_y}$ ($B_0 > 0$).

La barre est initialement bloquée par des cales placées de sorte que la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide. Sa coordonnée selon l'axe de déplacement est alors $z = 0$ (la barre est alors à la distance b du sommet des tiges). À l'instant $t = 0$, on retire les cales. La barre se met à osciller verticalement (mouvement de translation), sa position étant repérée par sa coordonnée z.

1. Justifier l'apparition d'un courant dans le circuit fermé et déterminer **soigneusement** l'expression de son intensité $i(t)$ en fonction des grandeurs de l'énoncé, dans le sens fixé par la convention représentée.
2. Faire un bilan des trois forces qui s'exercent sur la barre (on rappelle qu'on néglige toute force au niveau des liaisons) et donner leurs expressions en fonction des grandeurs de l'énoncé.
3. En utilisant la loi de la quantité du mouvement, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
4. Tous les autres paramètres étant fixés, montrer que le mouvement est pseudo-périodique pour B_0 inférieur à une valeur seuil $B_{0,\max}$ que l'on exprimera.

On suppose que l'on a $B_0 < B_{0,\max}$.

5. Montrer que $z(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)e^{-\lambda t} + d$$

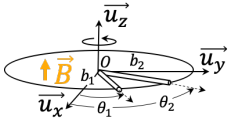
et déterminer les expressions de d, ω et λ en fonction des grandeurs de l'énoncé.

6. Donner les expressions de la pseudo-période T et du temps caractéristique d'amortissement des oscillations τ.
7. Représenter l'évolution de la position $z(t)$ en fonction du temps. Faire apparaître d, le temps caractéristique d'amortissement des oscillations τ et la pseudo-période T. On prêtera attention aux conditions initiales.
8. Parmi les portraits de phase de la *Figure* **??**, lequel peut correspondre à celui du système ? Justifier.
9. Parmi les trois forces qui s'exercent sur la barre, lesquelles sont conservatives ? Donner alors (sans démonstration) l'expression de l'énergie potentielle de la barre.
10. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer dans quel sens évolue l'énergie mécanique de la barre (est-elle constante, augmente-t-elle, diminue-t-elle, oscille-t-elle… ?).

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Barres en rotation (⋆⋆)

On considère 2 barres représentant deux rayons d'un même cercle de rayon ℓ. Chaque barre a une résistance R et un moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation (Oz).

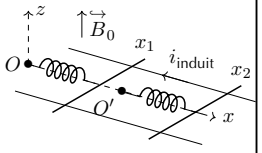


La résistance du cercle est négligeable. Le tout est placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\ \vec{u_z}$. La première barre b_1 est en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire $(\vec{\omega}_1 = \omega_1\ \vec{u_z})$. La barre b_2 est sans vitesse initiale. Tous les mouvements sont supposés sans frottement.

1. Déterminer la vitesse de la barre b_2 : $\vec{\omega}_2 = \omega_2(t)\ \vec{u_z}$.
2. Faire un bilan de puissance et interpréter.

EXERCICE 7 Couplage électromécanique (⋆⋆)

On considère le montage représenté ci-contre, constitué de deux barreaux de longueur ℓ aux positions x_1 et x_2 accrochés à des ressorts de longueur à vide ℓ_0 et de constantes de raideur identiques k.



La résistance électrique globale du ciruit est R. Le circuit, intialement au repos, est plongé dans un champ magnétique extérieur homogène $\vec{B}_0 = B_0\ \vec{u_z}$.

PARTIE A : Courant induit :

1. Préciser l'expression du flux Φ_B du champs magnétique traversant le circuit bouclé.
2. En déduire l'expression de la force électromotrice e_L et du courant induit i_{induit} en fonction de $\dot{x_1}$ et $\dot{x_2}$.

PARTIE B : Équations mécaniques :

3. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à chaque barreau et montrer que x_1 et x_2 vérifient des équations d'oscillateurs harmoniques :

$$\begin{cases} \ddot{x_1} + \omega_0^2 x_1 &= \alpha(\dot{x_2} - \dot{x_1}) \\ \ddot{x_2} + \omega_0^2 x_2 &= \alpha(\dot{x_1} - \dot{x_2}) \end{cases}$$

Le barreau 1 est tiré d'une longueur a par rapport à sa position d'équilibre puis est lâché sans vitesse initiale.

4. Résoudre le système en posant $S = x_1 + x_2$ et $D = x_2 - x_1$. On notera ω_p la pseudo-pulsation du système et λ le coefficient d'amortissement.

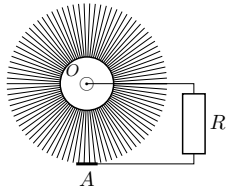
PARTIE C : Bilan d'énergie :

5. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du système {barreau 1 + barreau 2} vérifie :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -Ri^2$$

EXERCICE 8 Freinage d'un poids lourd (⋆⋆)

On grave sur un disque de rayon a et de moment d'inertie par rapport à son axe de rotation $J_\Delta = \frac{1}{2}ma^2$ des lignes conductrices radiales de sorte que pour toute position angulaire un courant puisse circuler dans l'une et une seule de ses lignes entre O et A. On branche entre O et A une résistance R.



Le disque est situé dans une zone de champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\ \vec{u_z}$ dirigé selon l'axe du disque. La liaison pivot entre l'axe Δ et le disque est supposée idéale. Le disque a une vitesse angulaire de rotation initiale ω_0.

1. Déterminer la durée au bout de laquelle la vitesse angulaire de rotation du disque aura été divisée par 20.

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.