Thermodynamique

(Statique des fluides - Forces pressantes - équilibre thermodynamique)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Ascension d'un ballon (⋆)

1. La loi du nivellement barométrique est trouvée à partir de deux équations :
   - relation fondamentale de la statique des fluides : $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g$.
   - l'équation d'état des gaz parfaits : $\frac{p}{\mu} = rT$ avec $r = \frac{R}{M_{\text{air}}}$ la constante spécifique de l'air.

   On obtient ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g = -\frac{p}{rT}g \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\ln(p)}{\mathrm{d}z} = \frac{-g}{rT_0(1-az)}$$

   soit :

$$\mathrm{d}\ln(p) = \mathrm{d}\left(\frac{g}{arT_0}\ln(1-az)\right) \Rightarrow p(z) = A(1-az)^K$$

   avec $p(0) = p_0 = A$, soit :

$$\boxed{p(z) = p_0(1-az)^K} \quad \text{avec} \quad \boxed{T(z) = T_0(1-az)} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mu(z) = \frac{p_0}{rT_0}(1-az)^{K-1}}$$

2. Le ballon est soumis à :
   - son poids $\overrightarrow{P} = \left(m + \frac{p_0 M}{RT}V\right)g \simeq 24,45$ mN.
   - la poussée d'Archimède de l'air : $\overrightarrow{\Pi} = \mu(z)Vg$

   Le ballon arrête son ascension lorsque :

$$m + \frac{p_0 M}{RT}V = \mu(z)V = \frac{p_0 V}{rT_0}(1-az)^{K-1}$$

   soit :

$$(1-az)^{K-1} = \frac{rT_0}{p_0 V}\left(m + \frac{p_0 M}{RT}V\right) \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\left(\frac{rT_0}{p_0 V}\left(m + \frac{p_0 M}{RT}V\right)\right)^{\frac{1}{K-1}} \simeq 3580 \text{ m}}$$

EXERCICE 2 Barrage plan (⋆)

1. Si on considère un élément infinitésimal de paroi où la pression est homogène (donc une tranche entre z et $z + \mathrm{d}z$), la force de poussée $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$ de l'eau sur le barrage a pour expression :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F} = pL\mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_x}}$$

   La force pressante exercée par l'eau sur toute la paroi est donc :

$$\overrightarrow{F} = \int \mathrm{d}\overrightarrow{F} = \int_{z=0}^{z=h} p(z)L\mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_x}$$

   Or, la relation fondamentale de la statique des fluides pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g$$

soit :

$$p(z) = p_{\text{atm}} + \mu g(h - z)$$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{F} = \int \mathrm{d}\overrightarrow{F} = \int_{z=0}^{z=h} \left(p_{\text{atm}} + \mu g(h-z)\right) L \mathrm{d}z \, \overrightarrow{u_x}$$

soit :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \underbrace{p_{\text{atm}} L h \, \overrightarrow{u_x}}_{\text{Compensée par l'air}} + \mu g L \frac{h^2}{2} \overrightarrow{u_x}}$$

2. Pour déterminer la position du centre de poussée, on ne considère que la force liée à la surpression par rapport à la pression atmosphérique. On cherche donc un point G, d'altitude z_G, situé sur l'axe de symétrie du barrage, tel que le moment de l'action mécanique exercée par l'eau en ce point soit nul :

$$\int \overrightarrow{GM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \int_0^h (z - z_G)\mu g L (h - z) \mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}(h + z_G)z^2 - h z_G z \right]_0^h = 0$$

soit :

$$-\frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2}(h + z_G) - h^2 z_G = 0 \Rightarrow \boxed{z_G = \frac{h}{3}}$$

EXERCICE 3 Équilibre thermodynamique (⋆⋆)

1. L'entropie étant une grandeur additive $\boxed{S = S_1 + S_2}$.
2. À l'équilibre thermodynamique, l'entropie du système est maximale :

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}(S_1 + S_2) = 0$$

soit :

$$0 = \frac{1}{T_1}\mathrm{d}U_1 + \frac{p_1}{T_1}\mathrm{d}V_1 + \frac{1}{T_2}\mathrm{d}U_2 + \frac{p_2}{T_2}\mathrm{d}V_2$$

Comme $\mathrm{d}U = 0 = \mathrm{d}U_1 + \mathrm{d}U_2$ (système Σ isolé) et $\mathrm{d}V = 0 = \mathrm{d}V_1 + \mathrm{d}V_2$ (volume V fixe), on peut écrire :

$$\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\mathrm{d}U_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)\mathrm{d}V_1 = 0$$

Cette égalité est vraie quelle que soient les variations indépendantes de U_1 et V_1 qui sont ici deux degrés de liberté indépendants du système Σ, on peut donc identifier :

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} \Rightarrow \boxed{T_1 = T_2} \quad \text{et} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \boxed{p_1 = p_2}$$

La première égalité traduit l'équilibre thermique du système. La seconde égalité traduit l'équilibre mécanique.

3. Si la paroi interne n'autorise plus les échanges thermiques, il faut que chaque sous système Σ_1 et Σ_2 soit à l'équilibre thermodynamique (U_1 et V_1 ne sont plus indépendants), soit :

$$\mathrm{d}S_1 = \frac{1}{T_1}\mathrm{d}U_1 + \frac{p_1}{T_1}\mathrm{d}V_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}S_2 = \frac{1}{T_2}\mathrm{d}U_2 + \frac{p_2}{T_2}\mathrm{d}V_2 = 0$$

avec $\mathrm{d}U = \mathrm{d}U_1 + \mathrm{d}U_2 = 0$ et $\mathrm{d}V = \mathrm{d}V_1 + \mathrm{d}V_2 = 0$, soit :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\mathrm{d}U_1 = -p_1\mathrm{d}V_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}U_2 = -p_2\mathrm{d}V_2 \Rightarrow \mathrm{d}U = (p_2 - p_1)\mathrm{d}V_1$$

La relation est valable pour toute variation de V_1, on peut donc établir l'équilibre mécanique $\boxed{p_1 = p_2}$.

La température de chaque compartiment prend, a priori, n'importe qu'elle valeur à condition que l'énergie interne totale du système reste constante après relâchement de la contrainte.

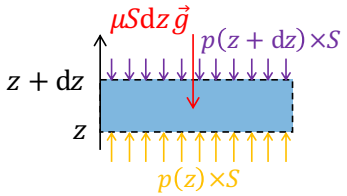
4. Si la paroi autorise les échanges de matière, il faut rajouter la condition d'équilibre chimique : égalité des potentiels chimiques de chaque système $\boxed{\mu_1 = \mu_2}$.

L'essentiel

EXERCICE 4 Masse de l'atmosphère (⋆⋆)

1. Le bilan des forces auxquelles est soumis le système étudié dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen est le suivant :

- Le poids du système $\overrightarrow{P} = -\mu S\mathrm{d}z g\,\overrightarrow{u_z}$.
- Les efforts pressant sur la face inférieure du système $p(z) \times S\,\overrightarrow{u_z}$.
- Les efforts pressant sur la face supérieure $-p(z+\mathrm{d}z) \times S\,\overrightarrow{u_z}$.



À l'équilibre dans le référentiel terrestre, l'ensemble des forces auquel est soumis le système se compense. On a donc :

$$-\mu(z)S\mathrm{d}z g + p(z)S - p(z+\mathrm{d}z)S = 0 \Rightarrow \frac{p(z+\mathrm{d}z) - p(z)}{\mathrm{d}z} = -\mu(z)g$$

À l'aide de l'indication de l'énoncé, on peut ainsi réécrire cette équation :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}(z) = -\mu(z) \times g}$$

L'équation d'état des gaz parfaits est $\frac{p(z)}{\mu(z)} = \frac{R}{M_{\text{air}}}T$, soit $\mu(z) = \frac{M_{\text{air}}}{RT} \times p(z)$.

Les deux équations précédentes permettent d'écrire une équation différentielle uniquement en fonction de $p(z)$:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}(z) = -\frac{M_{\text{air}}g}{RT} \times p(z)$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$p(z) = Ae^{-\frac{M_{\text{air}}g}{RT}z}$$

avec A une constante à déterminer à partir des conditions aux limites : $p(0) = A = p_0$ d'où $\boxed{A = p_0}$.
Finalement, la loi de nivellement barométrique dans le modèle d'une atmosphère isotherme est :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{M_{\text{air}}g}{RT}z}$$

La pression $p(z_1)$ diminue de moitié si $p(z_1) = \frac{p_0}{2} = p_0 e^{-\frac{M_{\text{air}}g}{RT}z_1}$, soit $\boxed{z_1 = \dfrac{\ln(2)}{\frac{M_{\text{air}}g}{RT}} \simeq 5568 \text{ m}}$.

2. La loi d'état des gaz parfaits permet d'exprimer $\mu(z) = \frac{M_{\text{air}}}{RT} \times p(z) = \frac{M_{\text{air}} \times p_0}{RT} e^{-\frac{M_{\text{air}}g}{RT}z}$.
Connaissant la masse volumique $\mu(z)$ de l'atmosphère à l'altitude z, on peut en déduire la masse $\mathrm{d}m(z)$ d'un petit volume $\mathrm{d}V = S \times \mathrm{d}z$ d'atmosphère :

$$\mathrm{d}m(z) = \mu(z) \times S \times \mathrm{d}z$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

La masse M_{atm} de l'atmosphère est donc la somme (continue) de l'ensemble des ces « petites » masses $\mathrm{d}m(z)$, soit :

$$M_{\text{atm}} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}m(z) = \int_0^{+\infty} \mu(z) S \mathrm{d}z = \frac{M_{\text{air}} \times p_0 \times S}{RT} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{M_{\text{air}} g}{RT} z} \mathrm{d}z$$

soit :

$$M_{\text{atm}} = \frac{M_{\text{air}} \times p_0 \times S}{RT} \times \left[-\frac{RT}{M_{\text{air}} g} e^{-\frac{M_{\text{air}} g}{RT} z} \right]_0^{+\infty} = -\frac{p_0 S}{g} [0 - 1] = \frac{p_0 S}{g}$$

La surface au sol de la Terre est celle d'une sphère de rayon $R_T \simeq 6400$ km, soit $S = 4\pi R_T^2$.
La masse de l'atmosphère est ainsi :

$$\boxed{M_{\text{atm}} = \frac{p_0}{g} \times 4\pi R_T^2 \simeq 5,25 \times 10^{18} \text{ kg}}$$

☞ La masse de l'atmosphère terrestre est estimée à $5,14 \times 10^{18}$ kg, soit $2,1\%$ d'erreur relative par rapport au résultat trouvé avec le modèle - simplissime - de l'atmosphère isotherme.

EXERCICE 5 Expérience de Rüchardt (⋆⋆)

1. La pression peut être mesurée par un manomètre. Ici, il suffit de prendre une pièce mécanique déformable en fonction de la pression et de lui coller une jauge de déformation. Un étalonnage permet ensuite de connaître la pression à tout instant.
2. La bille est soumise à :
   - son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_x}$.
   - la force pressante du gaz sous pression : $\overrightarrow{F_{\text{p}}} = ps\,\overrightarrow{u_x}$.
   - la force pressante de l'air ambiant : $\overrightarrow{F_{\text{p}}} = -p_0 s\,\overrightarrow{u_x}$.

   Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la bille, étudiée dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit donc, en projection dans la direction $\overrightarrow{u_x}$:

$$\boxed{m\ddot{x} = -mg + (p - p_0)s}$$

   La pression $p_{\text{éq}}$ à l'équilibre est ainsi :

$$\boxed{p_{\text{éq}} = p_0 + \frac{mg}{s}}$$

3. Comme les compression détentes sont adiabatiques et réservsibles (i.e. isentropiques) les identités thermodynamiques permettent d'écrire :

$$\mathrm{d}U = T\underbrace{\mathrm{d}S}_{0} - p\mathrm{d}V \quad \text{et} \quad \mathrm{d}H = T\underbrace{\mathrm{d}S}_{0} + V\mathrm{d}p$$

   La première et la deuxième loi de Joule (pour un gaz parfait) s'écrivent également :

$$\mathrm{d}U = C_v \mathrm{d}T \quad \text{et} \quad \mathrm{d}H = C_p \mathrm{d}T$$

   soit :

$$C_v \mathrm{d}T = -p\mathrm{d}V \quad \text{et} \quad C_p \mathrm{d}T = V\mathrm{d}p$$

   En faisant le rapport des deux équations, on obtient :

$$\frac{C_p}{C_v} \mathrel{\hat{=}} \gamma = -\frac{V\mathrm{d}p}{p\mathrm{d}V}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

soit :

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}\gamma + \frac{\mathrm{d}p}{p} = 0 \Rightarrow \frac{p - p_{\text{éq}}}{p_{\text{éq}}} + \gamma\frac{sx}{V_0} = 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{p - p_{\text{éq}} \simeq -\gamma\frac{sxp_{\text{éq}}}{V_0}}$$

4. L'équation différentielle vérifiée par la variable x est donc :

$$m\ddot{x} = -\gamma\frac{s^2p_{\text{éq}}}{V_0}x \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \gamma\frac{s^2p_{\text{éq}}}{mV_0}x = 0}$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de période propre τ :

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{mV_0}{\gamma s^2p_{\text{éq}}}}}$$

En inversant l'équation, on obtient :

$$\boxed{\gamma = \frac{4\pi^2mV_0}{s^2p_{\text{éq}}T_0^2} \simeq 1,36}$$

Le gaz utilisé est donc certainement un gaz monomoatomique (gaz noble).
Les problèmes qui peuvent être rencontrés lors de l'expérimentation sont divers :

- L'irréversibilité des transformations (compressions/détentes).
- Les frottements de la bille dans le tube.
- Les pertes de gaz au niveau de la bille.
- La modélisation du gaz comme un gaz parfait.

➲ **Source : O. Granier**

EXERCICE 6 Pression d'une fosse océanique (⋆⋆)

1. Si l'eau est incompressible, la relation de l'hydrostatique des liquides incompressibles permet d'écrire :

$$\boxed{p(h) = p_{\text{atm}} + \mu gh \simeq 982 \text{ bar}}$$

2. En prenant en compte la compressibilité de l'eau, on introduit la notion de compressibilité isotherme.

a. On pose $p = p_0 + \varepsilon$. La masse volumique μ du liquide évolue continuement en fonction de la profondeur et donc de la pression. On a donc :

$$\mu(p) = \mu(p_0) + \varepsilon\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}p}(p_0) = \mu(p_0)\left(1 + \underbrace{\frac{1}{\mu(p_0)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}p}(p_0)}_{\chi_T(p_0)}\right)$$

la variation se faisant pour une température constante, si l'on considère que la masse volumique d'un corps pur monophasé est d'une manière générale bivariante (donc $\mu = \mu(p,T)$), on peut écrire que :

$$\boxed{\chi_T = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_T}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

☞ On peut considérer un système fermé de masse $m = \mu V$. La différentielle logarithmique de cette relation s'écrit : $\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} + \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$.

Ici, comme $T = T_0$, on retiendra $\chi_T = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}p}$. La relation fondamentale de l'hydrostatique des fluides étant $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = +g\mu$, on peut établir :

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -\chi_T \mathrm{d}p = g\chi_T \mu \mathrm{d}z \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z} = g\chi_T \mu^2}$$

b. On peut intégrer l'équation précédente pour obtenir :

$$\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu(z)} = g\chi_T z$$

soit :

$$\boxed{\mu(z) = \frac{\mu_0}{1 - g\mu_0\chi_T z}}$$

On en déduit ainsi que $p(z) - p_0 = \int_0^z \mu g \mathrm{d}z$, soit :

$$\boxed{p(z) = p_0 - \frac{1}{\chi_T}\ln(1 - g\mu_0\chi_T z)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p(h) = p_0 - \frac{1}{\chi_T}\ln(1 - g\mu_0\chi_T h) \simeq 1006 \text{ bar}}$$

On obtient également :

$$\boxed{\mu(h) = \frac{\mu_0}{1 - g\mu_0\chi_T h} \simeq 1050,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$$

L'approximation de fluide incompressible pour un liquide est donc globalement vérifiée, à 5% près pour μ et à $2,5\%$ près pour p.

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Étude d'une bifurcation (⋆⋆⋆)

1 Dans cette question, il faut utiliser le résultat suivant : l'intégrale des forces pressantes sur l'hémisphère constitué par la demi-bille est égal à l'intégrale des forces pressants sur la surface projectée du disque de section $\mathcal{A}$.

Le volume de chaque compartiment est ainsi :

$$V_1 = V_0 + L\mathcal{A}\theta \quad \text{et} \quad V_2 = V_0 - L\mathcal{A}\theta$$

Les forces pressantes associées sont donc :

$$\vec{F_1} = p_1\mathcal{A}\,\vec{u_\theta} = \frac{nRT\mathcal{A}}{V_0 + L\mathcal{A}\theta}\,\vec{u_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{F_2} = -p_2\mathcal{A}\,\vec{u_\theta} = -\frac{nRT\mathcal{A}}{V_0 - L\mathcal{A}\theta}\,\vec{u_\theta}$$

Comme $L\frac{\mathcal{A}}{V_0} \ll 1$, on peut faire un développement limité des expressions précédentes pour les simplifier :

$$\vec{F_1} \simeq \frac{nRT\mathcal{A}}{V_0}\left(1 - \frac{L\mathcal{A}\theta}{V_0}\right)\vec{u_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{F_2} \simeq -\frac{nRT\mathcal{A}}{V_0}\left(1 + \frac{L\mathcal{A}\theta}{V_0}\right)\vec{u_\theta}$$

La résultante des forces de pression sur la bille est donc :

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \simeq -\underbrace{\frac{2nRL\mathcal{A}^2}{V_0^2}}_{a} T\theta\,\vec{u_\theta}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. La bille est également soumise à son poids : $\overrightarrow{P} = -mg\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} + mg\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}$ qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p\text{pes}} = mgz + \text{cte} = mgL(\cos(\theta) - 1) + \text{cte}$
On peut écrire la résultante des forces de pression sous la forme :

$$\overrightarrow{F} = -aT\theta\,\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p\text{press}}}{\mathrm{d}\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

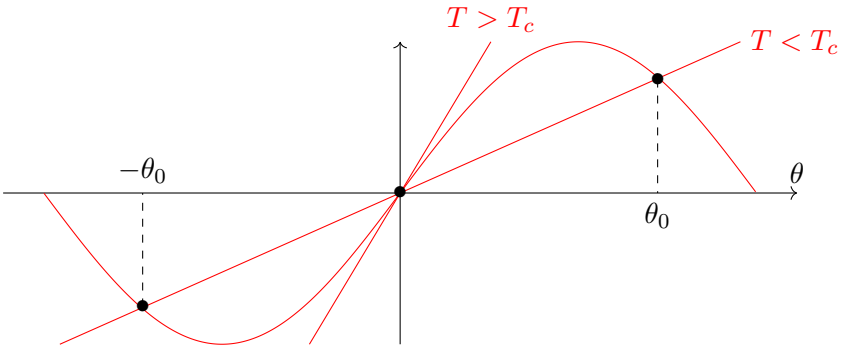
L'énergie potentielle du système est donc :

$$\mathcal{E}_p = mgL\cos(\theta) + \frac{1}{2}aLT\theta^2 + \text{cte}$$

Les positions d'équilibre θ_0 vérifient ainsi : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0) = 0$, soit :

$$-mgL\sin(\theta) + aLT\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\sin(\theta) = \frac{aT}{mg}\theta}$$

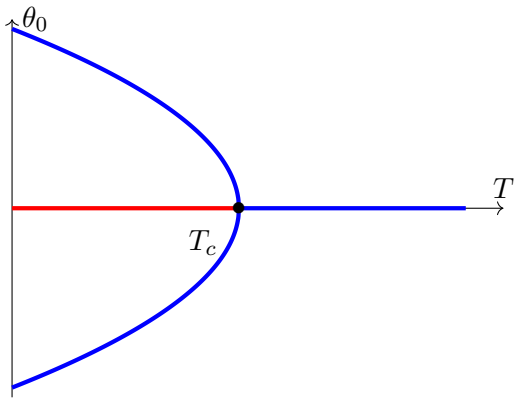
Une résolution graphique consiste à trouver les points d'intersection des deux fonctions :



Graphiquement, on voit que suivant la valeur de T, le système admet des positions d'équilibre différentes :

- Si $T \geq T_c$, il n'y a qu'une seule position d'équilibre : $\boxed{\theta_0 = 0}$.
- Si $T \leq T_c$, il peut y avoir trois positions d'équilibre : $\boxed{\theta_0 = 0}$ et deux autres positions $\pm\theta_0$ qui vérifient l'équation $\sin(\theta) = \frac{aT}{mg}\theta$.

3. La température critique du système vérifie $\frac{aT_c}{mg} = 1$, soit $\boxed{T_c = \frac{mg}{a}}$.
Les positions d'équilibre en fonction de la température ont l'allure suivante :



On observe la brisure de symétrie à $T = T_c$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

4. Pour $T = T_c - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et $\frac{\varepsilon}{T_c} \ll 1$, on a :

$$\sin(\theta_0(T)) \simeq \theta_0(T) - \frac{\theta_0^3(T)}{6}$$

soit :

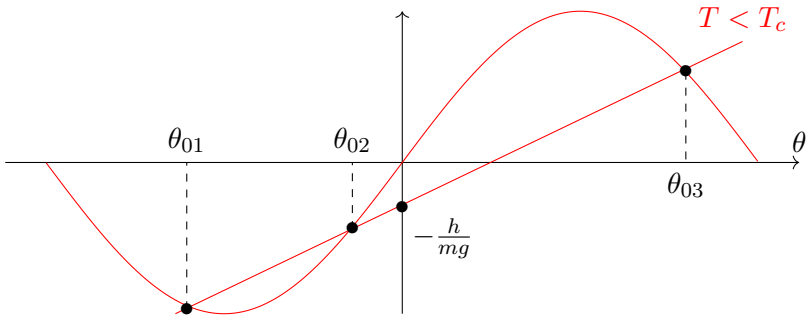
$$\theta_0(T) - \frac{\theta_0^3(T)}{6} = \frac{T}{T_c}\theta_0(T) \Rightarrow \boxed{\theta_0 = \sqrt{6 \times \frac{T_c - T}{T_c}}}$$

On en déduit ainsi que $\boxed{\beta = \frac{1}{2}}$ et $\boxed{A = \sqrt{\frac{6}{T_c}}}$.

5. L'équation d'équilibre devient :

$$\sin(\theta_0(T)) = \frac{T}{T_c}\theta(T) - \frac{h}{mg}$$

La résolution graphique du problème conduit à proposer la même forme de courbe, mais avec une translation vers le bas (pour $h \geq 0$) :



6. L'équation permettant de déterminer les positions d'équilibre est :

$$\sin(\theta_h(T)) = \frac{T}{T_c}\theta_h(T) - \frac{h}{mg}$$

En différentiant cette équation on obtient :

$$\cos(\theta_h(T))\mathrm{d}\theta_h = \frac{T}{T_c}\mathrm{d}\theta_h(T) - \frac{\mathrm{d}h}{mg}$$

soit :

$$\boxed{\chi(T) = \left(\frac{\mathrm{d}\theta_h}{\mathrm{d}h}\right)_{h=0} = \frac{\frac{1}{mg}}{\frac{T}{T_c} - \cos(\theta_0(T))}}$$

- Si $T \geq T_c$, il n'y a qu'une position d'équilibre : $\theta_0(T) = 0$. On obtient ainsi :

$$\boxed{\chi_\oplus = \left(\frac{\partial\theta_h}{\partial h}\right)_{h=0} = \frac{T_c}{mg}\,|T - T_c|^{-1}}$$

On identifie donc $\boxed{\Gamma = \frac{T_c}{mg}}$ et $\boxed{\gamma = 1}$

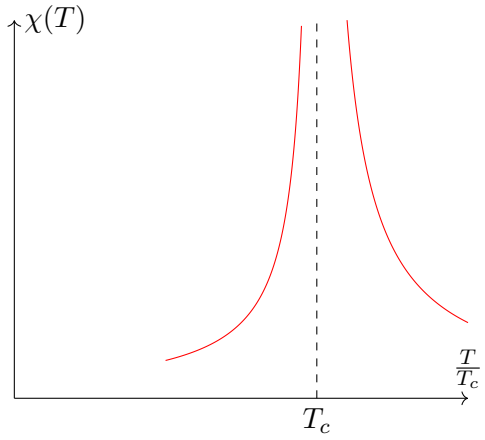
Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

- Si $T < T_c$, $\theta_0(T) \simeq \sqrt{\frac{6}{T_c}}\sqrt{T_c - T}$, soit $\cos(\theta_0(T)) \simeq 1 - \frac{6}{T_c}(T_c - T) = 3\frac{T}{T_c} - 2$.
  soit :

$$\boxed{\chi_\ominus = \frac{\frac{1}{mg}}{\frac{T}{T_c} - \cos(\theta_0(T))} = \frac{\frac{1}{mg}}{\frac{T}{T_c} + 2 - 3\frac{T}{T_c}}} = \frac{T_c}{2mg}(T_c - T)^{-1}$$

  On identifie donc $\boxed{\Gamma' = \frac{T_c}{2mg}}$ et $\boxed{\gamma' = 1}$

  La susceptibilité mécanique prend donc la forme représentée ci-dessous.



7 Pour $T = T_c$ et $\theta_h = \Delta\theta$, on a :

$$\Delta\theta\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{2}\right) = \Delta\theta - \frac{h}{mg}$$

soit :

$$\boxed{\theta_h(T_c) = \Delta\theta = \left(\frac{6h}{mg}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

On peut donc identifier $\boxed{\delta = 3}$.

EXERCICE 8 Vérin tournant (⋆⋆⋆)

1 On se place dans le cadre de deux compartiments à l'équilibre thermodynamique, donc de pression p_1 (à gauche) et p_2 (à droite) uniques et vérifiant l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_1 = \frac{nRT_1}{V_0 + Sx} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{nRT_2}{V_0 - Sx}$$

avec S la section du piston et $2V_0$ le volume total offert au gaz dans la chambre du verrin.

L'équilibre thermodynamique implique un équilibre mécanique et un équilibre thermique entre les deux compartiments ($T_1 = T_2 \mathrel{\hat{=}} T$). L'équilibre thermique s'obtient en égalisant la température de part et d'autre de la paroi de masse m.

L'équilibre mécanique de la paroi s'écrit ainsi :

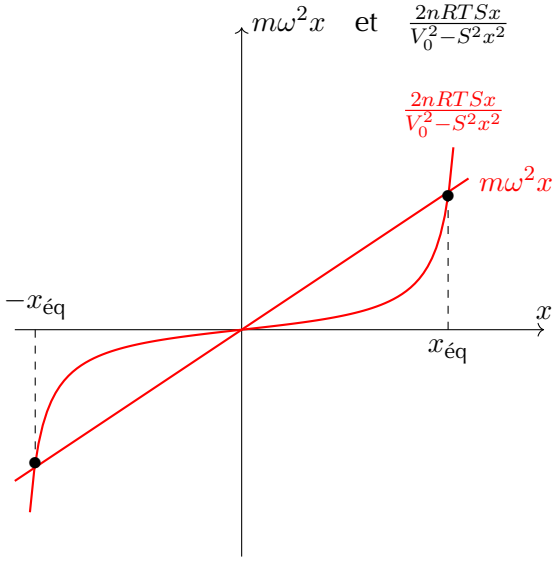
$$mx\omega^2\,\overrightarrow{u_x} = \frac{nRTS}{V_0 + Sx}\,\overrightarrow{u_x} - \frac{nRTS}{V_0 - Sx}\,\overrightarrow{u_x}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

soit :

$$-mx\omega^2 = -\frac{2nRTSx}{V_0^2 - S^2x^2}$$

Une résolution graphique de cette équation permet de discuter des positions d'équilibre :



On distingue trois positions d'équilibre :

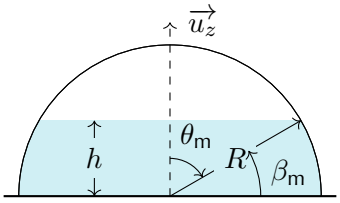
- Une en $x = 0$ qui est une position d'équilibre **instable**. Pour $|x| > 0$, l'effet de l'inertie l'emporte sur la force de rappel liée à la résultante des forces de pressions.
- Deux en $x = \pm x_{\text{éq}}$ qui sont des positions d'équilibre **stables**. Pour $x = x_{\text{éq}} + \epsilon$ ($\epsilon > 0$), on peut remarquer que l'effet de la force de rappel lié aux forces de pressions l'emporte sur les effets de l'inertie.

EXERCICE 9 Soulèvement d'une cloche (⋆⋆⋆)

Afin de répondre à la question posée, il est nécessaire de trouver la résultante des forces de pression de l'eau sur la cloche. On part des simplifications suivantes :

- la cloche est soumise à son poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$, à la somme des forces pressantes $\overrightarrow{F_1}$ de l'eau sur la cloche, à la somme des forces pressantes $\overrightarrow{F_2}$ de l'air sur la cloche et à la réaction $\overrightarrow{R}$ du support.
- Par symétrie cylindrique du problème, on suppose que toutes ces forces sont orientées dans le sens $+\overrightarrow{u_z}$.
- La masse volumique et la pression de l'air (sur une hauteur de quelques centimètres) sont supposées constantes.

On paramètre le problème suivant le schéma représenté ci-dessous :



Chaque élément infinitésimal de surface de contact entre l'eau et la cloche a donc pour expression :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{S} = R^2 \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\rho} = R^2\cos(\beta)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\rho}$$

L'intégrale des forces pressantes est donc :

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \left(\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{u_z}\right)\overrightarrow{u_z} = \underbrace{\iint_{\substack{\beta\in[0;\beta_{\text{m}}]\\ \varphi\in[0;2\pi]}} -p_0\mathrm{d}\overrightarrow{S}}_{\text{Force de l'air}} + \underbrace{\iint_{\substack{\beta\in[0;\beta_{\text{m}}]\\ \varphi\in[0;2\pi]}} p_0 + \mu g(h-z)\mathrm{d}\overrightarrow{S}}_{\text{Force de l'eau}} = \iint_{\substack{\beta\in[0;\beta_{\text{m}}]\\ \varphi\in[0;2\pi]}} \mu g(h-z)\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

soit :

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\iint_{\substack{\beta\in[0;\beta_m]\\ \varphi\in[0;2\pi]}}\mu g(h-\underbrace{R\sin(\beta)}_{z})R^2\cos(\beta)\underbrace{\sin(\beta)}_{\overrightarrow{u_\rho}.\,\overrightarrow{u_z}}\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_z}=\mu gR^2\times 2\pi\times\left[\frac{h}{2}\sin^2(\beta)-\frac{R}{3}\sin^3(\beta)\right]_0^{\beta_m}\overrightarrow{u_z}$$

soit :

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=2\pi\mu gR^2\times\left[\frac{h}{2}\frac{h^2}{R^2}-\frac{R}{3}\frac{h^3}{R^3}\right]\overrightarrow{u_z}=\frac{\pi\mu gh^3}{3}\overrightarrow{u_z}$$

La cloche se décolle donc lorsque la réaction du support s'annule, donc lorsque :

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{P}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\frac{\pi\mu gh^3}{3}\overrightarrow{u_z}=mg\,\overrightarrow{u_z}$$

soit :

$$\boxed{h=\left(\frac{3m}{\mu\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/