Thermodynamique

(Statique des fluides – Forces pressantes – équilibre thermodynamique)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Ascension d'un ballon (⋆)

Un ballon sphérique, de volume fixe $V \simeq 3,0$ L, est gonflé à l'hélium ($M \simeq 4,0$ g $\cdot$ mol^{-1}) à la pression de $1,0$ bar et à la température de 293 K. L'enveloppe du ballon est en aluminium et a une masse $m \simeq 2,0$ g. La pression au niveau du sol vaut $p_0 \simeq 1,0$ bar et la température vaut $T_0 \simeq 293$ K. La température varie en fonction de l'altitude selon la loi :

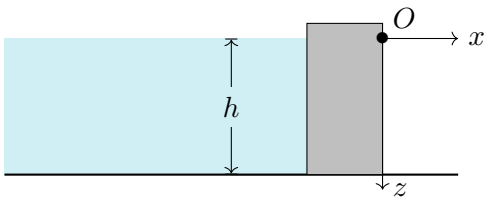
$$T(z) = T_0(1 - az)$$

avec $a \simeq 2 \times 10^{-2}$ km^{-1}.

1. Exprimer la pression $p(z)$ à l'altitude z en fonction de T_0, p_0, a et de la constante $K = \frac{M_{\text{air}} g}{R T_0 a}$.
2. On lâche le ballon. Jusqu'à quelle altitude h s'élèvera-t-il ?

EXERCICE 2 Barrage plan (⋆)

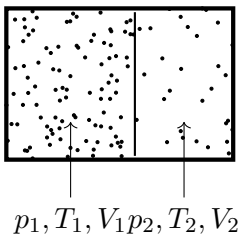
Un récipient contient de l'eau de masse volumique μ. On s'intéresse aux efforts exercés par le fluide sur la paroi plane du récipient de surface $S = hL$.



1. Quelle est la poussée exercée par le fluide sur un élément de paroi horizontale ? Sur toute la paroi ?
2. Montrer que, pour le calcul du moment résultant de ces actions, tout se passe comme si cette force résultante s'appliquait en un point C de la paroi, appelé « centre de poussée », à déterminer.

EXERCICE 3 Équilibre thermodynamique (⋆⋆)

On considère un piston isolé de son environnement, constitué de deux chambres (1) et (2) séparées par une paroi diathermane qui peut se déplacer sans frottement.



1. Exprimer l'entropie S du système composé des deux chambres.
2. Démontrer qu'à l'équilibre thermodynamique, on a nécessairement $T_1 = T_2$ et $p_1 = p_2$.
3. On considère désormais la paroi adiabatique. Démontrer qu'on a nécessairement $p_2 = p_1$ mais que l'on n'a pas de conditions sur T_1 et T_2.
4. Que dire de l'état d'équilibre si des transferts de matière sont autorisés à travers une paroi poreuse ?

L'essentiel

EXERCICE 4 Masse de l'atmosphère (⋆⋆)

On travaille avec le modèle de l'atmosphère isotherme avec $T \simeq 290$ K. Le champ de pesanteur est supposé uniforme ($g \simeq 9,8$ m $\cdot$ s^{-2}) et l'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M \simeq 29$ g $\cdot$ mol^{-1}. On note $p_0 \simeq 10^5$ Pa la pression de l'air au niveau du sol ($z \simeq 0$) et on choisit un axe vertical Oz ascendant.

1. Retrouver la loi du nivellement barométrique $p(z)$ pour l'atmosphère isotherme. À quelle altitude z_1 la pression vaut-elle $\frac{p_0}{2}$? Faire l'application numérique.
2. En supposant cette loi valable de $z \simeq 0$ à « l'infini » calculer la masse m_{atm} de l'atmosphère et faire l'application numérique avec $R_T \simeq 6400$ km.

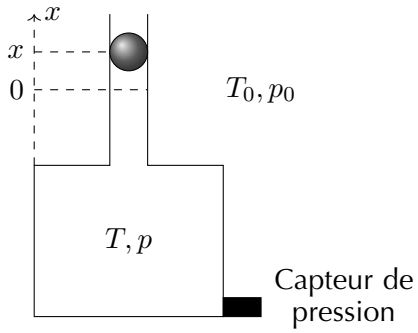
EXERCICE 5 Expérience de Rüchardt (⋆⋆)

La méthode de Rüchardt permet de déterminer le rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ des capacités thermiques d'un gaz parfait à pression et à volume constants, en étudiant le mouvement d'une bille dans un tube en verre. La bille métallique, de diamètre très voisin de celui du tube, se comporte comme un piston étanche.

On néglige les frottements. Lorsqu'on lâche la bille dans le tube de section s, on observe des oscillations autour d'une position d'équilibre. La méthode consiste à mesurer la période des oscillations τ de la bille dans le tube ou, ce qui est équivalent, la période τ des oscillations de la pression du gaz contenu à l'intérieur de la bouteille. Pour cela, on enregistre la pression à l'aide d'un capteur de pression pendant environ 25 s. Le gaz est assimilé à un gaz parfait.

On note x la position du centre de la bille à l'instant t (l'origine $x = 0$ est choisie à la position d'équilibre de la bille) ; T et p désignent la température et la pression du gaz à l'intérieur de la bouteille.

Données : $m \simeq 20$ g (masse de la bille), $p_0 \simeq 1,0$ bar et $T_0 \simeq 293$ K (pression et température de l'air atmosphérique), $s \simeq 2,0$ cm^2 (section intérieure du tube), $g \simeq 9,8$ m $\cdot$ s^{-2} (champ de pesanteur terrestre) et $V_0 \simeq 10$ L (volume total, pour $x = 0$).

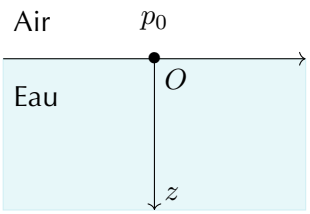


1. Citer quelques exemples de méthodes de mesure de pression.
2. En appliquant le théorème du centre d'inertie à la bille, établir l'équation différentielle du mouvement de la bille. Quelle est la pression $p_{éq}$ à l'équilibre ?
3. D'un point de vue thermodynamique, les compressions et détentes du gaz à l'intérieur de la bouteille sont considérées comme pratiquement réversibles et adiabatiques, donc isentropiques : la loi de Laplace $pV^\gamma = \text{cte}$ s'applique. Les écarts de pression et de volume étant faibles, on approxime dV par $V - V_0 = s \times x$ et dp par $p - p_{éq}$. En déduire alors $p - p_{éq}$ en fonction de x.
4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la variable x. Quelle est la période τ des oscillations de pression ? On mesure $\tau \simeq 1,2$ s. Déterminer la valeur de γ. Commenter la valeur obtenue. Quels peuvent être les problèmes d'ordre expérimental rencontrés ?

EXERCICE 6 Pression d'une fosse océanique (⋆⋆)

La fosse des Mariannes est la fosse océanique la plus profonde connue à ce jour, s'enfonçant dans le nord-ouest de l'océan Pacifique à plus de 10 km *sous le niveau de la mer.*

On considère une fosse océanique de profondeur $h \simeq 10$ km. La pression à la surface de l'eau est $p_0 \simeq 1$ bar et on supposera la température uniforme et égale à T_0.



1. Calculer la pression $p(h)$ au fond de la fosse en supposant l'eau incompressible.
2. On veut déterminer $p(h)$ en tenant compte de la compressibilité de l'eau. On doit donc considérer que la masse volumique μ de l'eau dépend maintenant de la profondeur z (prise nulle à la surface libre de l'eau). On notera μ_0 la masse volumique de l'eau à la surface.
   - **a.** Montrer que le coefficient de compressibilité isotherme peut s'écrire : $\chi_T = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T$. Que devient cette expression puisque $T = T_0 = \text{cte}$? En déduire $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}$.
   - **b.** Déduire de la question précédente les expressions de $\mu(z)$, puis de $p(z)$.
   - **c.** Calculer $\mu(h)$ et $p(h)$ avec un coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T \simeq 4,9 \times 10^{-10}$ Pa^{-1}. Commenter.

Données : $g \simeq 9,81$ m $\cdot$ s^{-2} et $\mu_0 \simeq 1000$ kg $\cdot$ m^{-3}.

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Étude d'une bifurcation (⋆⋆⋆)

Considérons un tube en forme de tore incomplet (en Ω) placé verticalement dans le champ de pesanteur uniforme comme l'indique la *Figure 1* et contenant dans chacun des compartiments une mole de gaz parfait. Une bille de masse m est susceptible de se déplacer sans frottement, mais elle sépare hermétiquement les deux compartiments. Le volume total disponible pour le gaz vaut $2V_0$, l'aire de la section droite du tore est notée $\mathcal{A}$, le grand rayon du tore est L et le volume occupé par la bille est négligeable de sorte que $L\frac{\mathcal{A}}{V_0} \ll 1$. Le tout baigne à l'équilibre thermique dans un thermostat à température T.

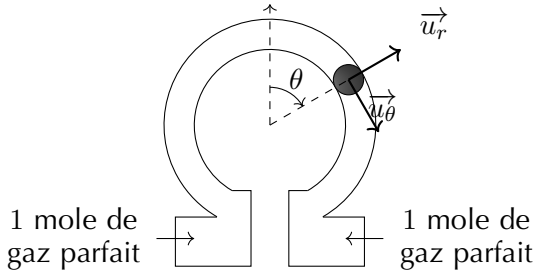


Figure 1 – Dispositif expérimental

Lorsque la bille est dans une position inclinée d'un angle θ, la différence des pressions entre les deux compartiments produit une force de rappel tangentielle proportionnelle à T.

1. Exprimer cette force sous la forme $aT\theta$ où vous donnerez l'expression du coefficient a en fonction des caractéristiques du gaz et du tube.
2. Rechercher les positions d'équilibre θ_0 et proposer une méthode graphique permettant de trouver leurs valeurs.
3. Déterminer la température « critique » T_c du système à laquelle se produit une brisure de symétrie. Représenter l'allure de l'angle d'équilibre $\theta_0(T)$ en fonction de la température.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

4. Déterminer l'exposant critique β et la constante A décrivant la manière dont croît l'angle $\theta_0(T)$ lorsque T diminue juste en dessous de la température critique,

$$\theta_0(T) \simeq A \times |T - T_c|^{\beta}$$

pour $T \to T_c$.

5. On se place maintenant dans la situation où $\theta > 0$, on tient compte d'une force supplémentaire constante opposée à la force de rappel, $F = h\ \overrightarrow{u_\theta}$ avec $h \ll mg$. La nouvelle position d'équilibre est notée $\theta_h(T) = \theta_0(T) + \Delta\theta(T)$. Faites une nouvelle représentation graphique et tracez l'allure de $\theta_h(T)$ sans chercher à en déterminer la forme mathématique.

6. Calculer la susceptibilité mécanique $\chi = \left(\frac{\partial \theta_h}{\partial h}\right)_{h=0}$ au-dessus et au-dessous de T_c, ainsi que les exposants critiques γ et γ' associés,

$$\chi_{\oplus}(T) \simeq \Gamma\,|T - T_c|^{-\gamma} \text{ pour } T \to T_c^+$$
$$\chi_{\ominus}(T) \simeq \Gamma'\,|T - T_c|^{-\gamma'} \text{ pour } T \to T_c^-$$

Les deux constantes Γ et Γ' sont différentes mais on ne demande pas leurs valeurs. Tracer l'allure de la susceptibilité χ en fonction de T.

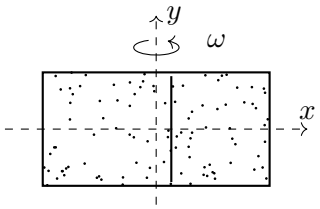
7. Lorsqu'on se place sur l'isotherme critique, à $T = T_c$, en présence de la force externe h supposée petite, on définit l'exposant critique δ par la relation :

$$\theta_h(T_c) \propto h^{\frac{1}{\delta}}$$

Déterminer la valeur de δ.

EXERCICE 8 Vérin tournant (⋆⋆⋆)

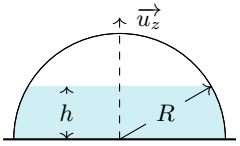
On place une mole de gaz parfait de part et d'autre d'un piston qui se déplace sans frottement dans un vérin cylindrique en rotation sur lui-même à la vitesse angulaire ω.



1. Discuter de la stabilité des positions d'équilibre du piston.

EXERCICE 9 Soulèvement d'une cloche (⋆⋆⋆)

Pour quelle hauteur d'eau la cloche sphérique de rayon R, de masse m, renversée sur le plan horizontal, va-t-elle se soulever ?



Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 1 Ascension d'un ballon (⋆)

1. La loi du nivellement barométrique est trouvée à partir de deux équations :
   - relation fondamentale de la statique des fluides : $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g$.
   - l'équation d'état des gaz parfaits : $\frac{p}{\mu} = rT$ avec $r = \frac{R}{M_{\text{air}}}$ la constante spécifique de l'air.

   On obtient ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g = -\frac{p}{rT}g \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\ln(p)}{\mathrm{d}z} = \frac{-g}{rT_0(1-az)}$$

   soit :

$$\mathrm{d}\ln(p) = \mathrm{d}\left(\frac{g}{arT_0}\ln(1-az)\right) \Rightarrow p(z) = A(1-az)^K$$

   avec $p(0) = p_0 = A$, soit :

$$\boxed{p(z) = p_0(1-az)^K} \quad \text{avec} \quad \boxed{T(z) = T_0(1-az)} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mu(z) = \frac{p_0}{rT_0}(1-az)^{K-1}}$$

2. Le ballon est soumis à :
   - son poids $\overrightarrow{P} = \left(m + \frac{p_0 M}{RT}V\right)g \simeq 24,45$ mN.
   - la poussée d'Archimède de l'air : $\overrightarrow{\Pi} = \mu(z)Vg$

   Le ballon arrête son ascension lorsque :

$$m + \frac{p_0 M}{RT}V = \mu(z)V = \frac{p_0 V}{rT_0}(1-az)^{K-1}$$

   soit :

$$(1-az)^{K-1} = \frac{rT_0}{p_0 V}\left(m + \frac{p_0 M}{RT}V\right) \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\left(\frac{rT_0}{p_0 V}\left(m + \frac{p_0 M}{RT}V\right)\right)^{\frac{1}{K-1}} \simeq 3580 \text{ m}}$$

EXERCICE 2 Barrage plan (⋆)

1. Si on considère un élément infinitésimal de paroi où la pression est homogène (donc une tranche entre z et $z + \mathrm{d}z$), la force de poussée $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$ de l'eau sur le barrage a pour expression :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F} = pL\mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_x}}$$

   La force pressante exercée par l'eau sur toute la paroi est donc :

$$\overrightarrow{F} = \int \mathrm{d}\overrightarrow{F} = \int_{z=0}^{z=h} p(z)L\mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_x}$$

   Or, la relation fondamentale de la statique des fluides pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g$$

   soit :

$$p(z) = p_{\text{atm}} + \mu g(h-z)$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

On obtient donc :

$$\overrightarrow{F} = \int \mathrm{d}\overrightarrow{F} = \int_{z=0}^{z=h} (p_{\text{atm}} + \mu g(h-z))\, L\mathrm{d}z\, \overrightarrow{u_x}$$

soit :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \underbrace{p_{\text{atm}} Lh\, \overrightarrow{u_x}}_{\text{Compensée par l'air}} + \mu g L \frac{h^2}{2}\, \overrightarrow{u_x}}$$

2. Pour déterminer la position du centre de poussée, on ne considère que la force liée à la surpression par rapport à la pression atmosphérique. On cherche donc un point G, d'altitude z_G, situé sur l'axe de symétrie du barrage, tel que le moment de l'action mécanique exercée par l'eau en ce point soit nul :

$$\int \overrightarrow{GM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \int_0^h (z - z_G)\mu g L(h-z)\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}(h+z_G)z^2 - hz_G z\right]_0^h = 0$$

soit :

$$-\frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2}(h+z_G) - h^2 z_G = 0 \Rightarrow \boxed{z_G = \frac{h}{3}}$$

EXERCICE 3 Équilibre thermodynamique (⋆⋆)

1. L'entropie étant une grandeur additive $\boxed{S = S_1 + S_2}$.
2. À l'équilibre thermodynamique, l'entropie du système est maximale :

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}(S_1 + S_2) = 0$$

soit :

$$0 = \frac{1}{T_1}\mathrm{d}U_1 + \frac{p_1}{T_1}\mathrm{d}V_1 + \frac{1}{T_2}\mathrm{d}U_2 + \frac{p_2}{T_2}\mathrm{d}V_2$$

Comme $\mathrm{d}U = 0 = \mathrm{d}U_1 + \mathrm{d}U_2$ (système Σ isolé) et $\mathrm{d}V = 0 = \mathrm{d}V_1 + \mathrm{d}V_2$ (volume V fixe), on peut écrire :

$$\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\mathrm{d}U_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)\mathrm{d}V_1 = 0$$

Cette égalité est vraie quelle que soient les variations indépendantes de U_1 et V_1 qui sont ici deux degrés de liberté indépendants du système Σ, on peut donc identifier :

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} \Rightarrow \boxed{T_1 = T_2} \quad \text{et} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \boxed{p_1 = p_2}$$

La première égalité traduit l'équilibre thermique du système. La seconde égalité traduit l'équilibre mécanique.

3. Si la paroi interne n'autorise plus les échanges thermiques, il faut que chaque sous système Σ_1 et Σ_2 soit à l'équilibre thermodynamique (U_1 et V_1 ne sont plus indépendants), soit :

$$\mathrm{d}S_1 = \frac{1}{T_1}\mathrm{d}U_1 + \frac{p_1}{T_1}\mathrm{d}V_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}S_2 = \frac{1}{T_2}\mathrm{d}U_2 + \frac{p_2}{T_2}\mathrm{d}V_2 = 0$$

avec $\mathrm{d}U = \mathrm{d}U_1 + \mathrm{d}U_2 = 0$ et $\mathrm{d}V = \mathrm{d}V_1 + \mathrm{d}V_2 = 0$, soit :

$$\mathrm{d}U_1 = -p_1\mathrm{d}V_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}U_2 = -p_2\mathrm{d}V_2 \Rightarrow \mathrm{d}U = (p_2 - p_1)\mathrm{d}V_1$$

La relation est valable pour toute variation de V_1, on peut donc établir l'équilibre mécanique $\boxed{p_1 = p_2}$.

La température de chaque compartiment prend, a priori, n'importe qu'elle valeur à condition que l'énergie interne totale du système reste constante après relâchement de la contrainte.

4. Si la paroi autorise les échanges de matière, il faut rajouter la condition d'équilibre chimique : égalité des potentiels chimiques de chaque système $\boxed{\mu_1 = \mu_2}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/