Électrocinétique

(Traitement analogique linéaire du signal par filtre passif)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Circuit résonant (⋆)

On considère le circuit RLC représenté en *Figure 1*, avec :
$\underline{e} = \underline{E}e^{j\omega t}$.

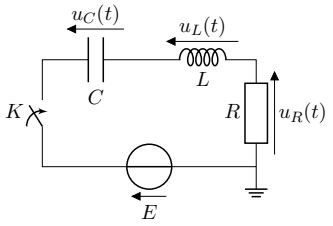


Figure 1 – Circuit RLC série

1. Identifier l'équation différentielle qui régit le comportement de l'intensité i du courant dans la branche
2. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_R}}{\underline{e}}$ sous forme canonique.
3. Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert.
   - **a.** Identifier les pentes des régimes asymptotiques haute et basse fréquences.
   - **b.** Quelle est la valeur de $G_{\text{dB}\,max}$?
   - **c.** Montrer que la bande passante $\Delta\omega$ est reliée au facteur de qualité Q et à la pulsation propre par la relation $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.
4. Donner l'expression temporelle de $u_R(t)$ en fonction de Q, ω_0 et E.
5. Identifier la puissance $\mathcal{P}_J(t)$ dissipée par effet Joule dans la résistance ainsi que sa valeur moyenne $\langle \mathcal{P}_J \rangle$.

EXERCICE 2 Circuit RC parallèle (⋆)

On considère le circuit électrique RC parallèle représenté en *Figure 2*.

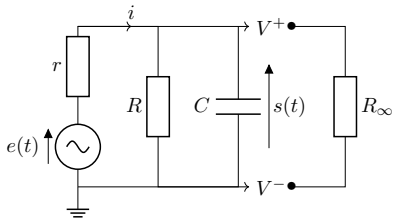


Figure 2 – Circuit électrique

Le GBF, de résistance interne r, alimente une résistance et un condensateur montés en dérivation. La tension $s(t)$ au bornes du tout est mesurée par un oscilloscope d'impédance interne $R_\infty \simeq 1$ MΩ.

1. Préciser l'intérêt de régler l'impédance d'entrée de l'oscilloscope sur $R_\infty \simeq 1$ MΩ.
2. Faire une analyse qualitative à basses et hautes fréquences pour déterminer la nature du filtre.
3. Identifier l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{éq}}$ du condensateur et du conducteur ohmique montés en dérivation.
4. Identifier la fonction de transfert du quadripôle ainsi formé. Écrire cette fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

en identifiant les expressions de K et τ. Faire l'application numérique pour $r \simeq 50{,}0\ \Omega$, $C \simeq 10{,}0$ nF et $R \simeq 1{,}00$ kΩ.

5. Identifier les expressions du gain de décibels $G_{\text{dB}}(\omega)$ et de la phase $\Phi(\omega)$ de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.
6. Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ et identifier la bande passante du circuit.

L'essentiel

EXERCICE 3 Réponse fréquentielle d'un filtre (⋆)

On réalise le montage de la *Figure 3* pour lequel on applique à l'entrée une tension sinusoïdale de pulsation ω.

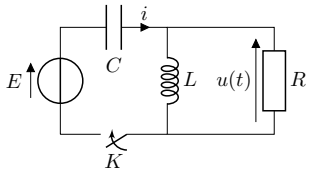


Figure 3 – Circuit électrique

On prendra $R \simeq 1{,}00$ kΩ, $L \simeq 1{,}00$ H et $C \simeq 0{,}750$ μF.

1. Déterminer sans calcul la nature du filtre.
2. Déterminer la fonction de transfert.
3. Pour quelle valeur ω_r de la pulsation le gain est-il maximal ?
4. Tracer la réponse en gain et en phase du filtre.

EXERCICE 4 Bobine réelle (⋆)

On considère le circuit électrique représenté en *Figure 4*.

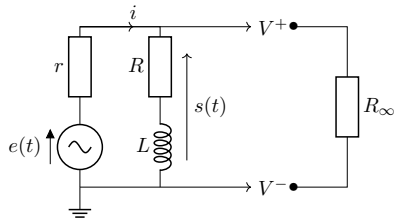


Figure 4 – Bobine réelle

Le GBF, de résistance interne r, alimente une bobine réelle de résistance R et d'inductance L. La tension $s(t)$ au bornes de la bobine est mesurée par un oscilloscope d'impédance interne $R_\infty \sim 1$ MΩ.

1. Faire une analyse qualitative à basses et hautes fréquences pour déterminer la nature du filtre.
2. Identifier la fonction de transfert du quadripôle ainsi formé. Écrire cette fonction de transfert sous la forme :

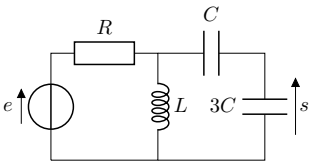
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{K + j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$$

en identifiant les expressions de K et τ. Faire l'application numérique pour $r \simeq 50{,}0\ \Omega$, $L \simeq 500$ mH et $R \simeq 12\ \Omega$.

3. Identifier les expressions du gain de décibels $G_{\text{dB}}(\omega)$ et de la phase $\Phi(\omega)$ de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.
4. Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.
5. Exprimer la puissance moyenne consommée par la bobine réelle. En déduire la puissance joule moyenne dissipée.

EXERCICE 5 Filtre de Colpitts (⋆⋆)

On considère le quadripôle suivant, où C est une capacité, R une résistance et L une inductance. Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé, en sortie ouverte (rien n'est branché entre les bornes de sortie).



1. Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en haute fréquence et en basse fréquence. De quel type de filtre s'agit-il ?
2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ et la mettre sous l'une des formes équivalentes :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

en introduisant les constantes H_0, ω_0 et Q dont on précisera les expressions en fonction de R, C et L.

3. Tracer le diagramme de Bode de ce quadripôle, en prenant la valeur $Q \simeq 0{,}1$. On cherchera tout d'abord les asymptotes des deux courbes, et on fera apparaître les valeurs correspondant à $\omega = \omega_0$.
4. Un circuit multiplieur fournit le signal d'entrée :

$$e(t) = 2A\cos(100\omega_0 t)\cos(101\omega_0 t)$$

Écrire $e(t)$ sous la forme d'une somme de cosinus. En déduire le signal obtenu à la sortie de ce filtre.

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Circuit RLC parallèle (⋆)

On considère le circuit RLC représenté en *Figure 5*. À l'instant initial, on ferme l'interrupteur K. Pour $t < 0$ s, la tension u aux bornes du condensateur est nulle.

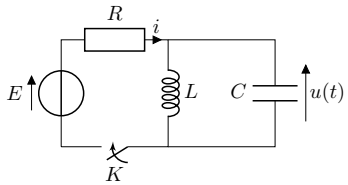


Figure 5 – Circuit RLC parallèle

On utilise les valeurs suivantes : $R \simeq 500\ \Omega$, $L \simeq 6{,}6$ mH et $C \simeq 100$ pF.

1. Justifier que l'intensité du courant traversant la bobine est continue. De même pour la tension aux bornes du condensateur.
2. Établir l'équation différentielle du circuit. Identifier la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.
3. Identifier de façon qualitative la nature du filtre créé.
4. Établir la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}(\omega)}{\underline{E}(\omega)}$ du système pour une entrée $E = E_0\cos(\omega t)$ à partir de l'équation différentielle de la *question* 2.
5. Tracer le diagramme de Bode du filtre.

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

EXERCICE 7 Émetteur de téléphone (⋆⋆)

Le dispositif présenté en *Figure 6* comprend un circuit (R, L, C) parallèle modélisant l'antenne d'émission et son filtre d'adaptation. Le dipôle (R, L, C) n'est qu'un schéma équivalent de l'antenne ; la puissance dissipée dans la résistance n'est pas en réalité perdue par effet Joule comme dans un résistor, mais perdue par rayonnement dans l'antenne.

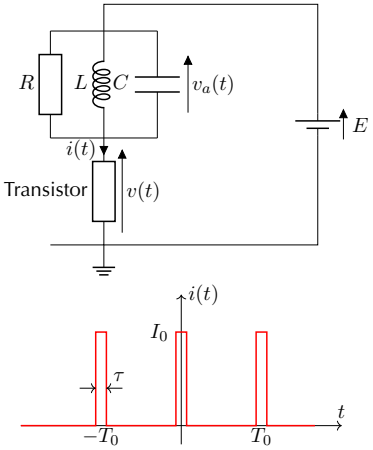


Figure 6 – Émetteur de téléphone portable

On considère ce circuit comme très sélectif de facteur de qualité $Q \simeq 100$. La valeur de la résistance d'émission est donnée : $R \simeq 37\ \Omega$. Les valeurs de L et C sont choisies de façon à transmettre les signaux de fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0} = 900$ MHz. Un transistor de puissance (T) impose la forme du courant dans l'antenne, sous forme d'impulsions de fréquence f_0 telles que représentées en *Figure 6*. Le calcul de l'amplitude de la composante fondamentale de ce signal donne la valeur I_1 :

$$I_1 = \frac{2}{\pi} I_0 \sin(\pi f_0 \tau).$$

1. Calculer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{v_a}{\underline{i}}$.
2. En déduire l'équation différentielle reliant $v_a(t)$ et $i(t)$. Identifier alors la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du filtre, que l'on exprimera en fonction de R, L et C.
3. Réécrire la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{a}{1 + jb\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

et donner les expressions de a et b en fonction de Q et R.

4. Déterminer la nature du filtre et montrer que le gain est maximal pour une fréquence f_s que l'on exprimera en fonction des paramètres du montage.
5. Déterminer la/les pulsation(s) de coupure, en déduire la largeur relative de la bande passante $\frac{\Delta_{BP} f}{f_s}$. Justifier que le filtre est très sélectif.
6. Justifier le fait que la tension $v_a(t)$ aux bornes de l'antenne est une fonction quasi-sinusoïdale du temps. Préciser sa fréquence et son amplitude en fonction de f_0, R, τ et I_0. On posera $V_1 = 2RI_0 f_0 \tau$.
7. Calculer les valeurs à affecter aux paramètres L et C pour répondre aux contraintes fixées.

Note : On définit le rendement du dispositif par le rapport $\mathcal{P}_u/\mathcal{P}_a$ entre la puissance utile et la puissance moyenne fournie par l'alimentation. Dans le cas où $\tau \ll T_0$ (impulsions brèves), ce rendement tend vers 1 : le transfert de puissance entre l'alimentation et l'antenne est optimal.

EXERCICE 8 Filtrage (⋆⋆)

On s'intéresse au circuit de la *Figure 7*, avec $e(t) = E\cos^3(\omega_0 t)$ avec $RC\omega_0 = 1$.

1. Calculer $s(t)$.

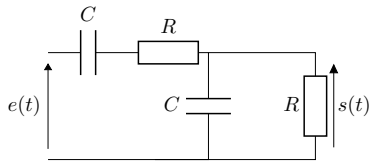


Figure 7 – Circuit de Wien

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

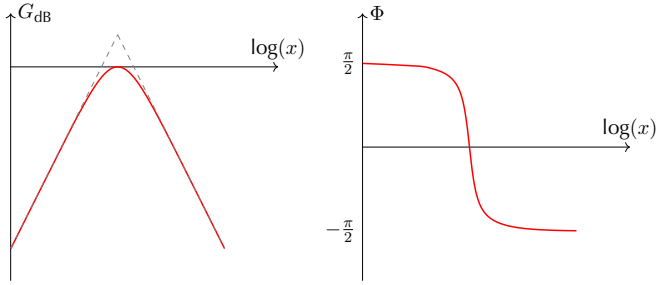
EXERCICE 1 Circuit résonant (⋆)

1. La loi des mailles s'écrit $e(t) = u_c(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + Ri(t)$, soit $\boxed{\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{C}i(t) + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}(t) + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)}$.
2. $u_r(t) = R \times i(t)$, soit $\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{RC}u_r(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}^2 u_r}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}t}(t) \Leftrightarrow j\omega\underline{e} = \frac{1}{RC}\underline{u}_r + \frac{L}{R}(j\omega)^2\underline{u}_r + j\omega\underline{u}_r$, d'où :

$$\boxed{\frac{\underline{u}_r}{\underline{e}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}}$$

avec $\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$.

3. **a.** En basses fréquences, la pente du régime asymptotique est de $+20$ dB/dec. En hautes fréquences, la pente du régime asymptotique est de -20 dB/dec.



b. $\boxed{G_{\text{dB}_{\max}} = G_{\text{dB}}(0) = 0\ \text{dB}}$.

c. La fonction de transfert est de la forme $\underline{H}(x) = \frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$. La bande passante étant définie pour les pulsations ω qui vérifient $G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$, on obtient l'égalité suivante sur le dénominateur :

$$\left|1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right|^2 = 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

On obtient donc deux équations correspondant aux deux cas possibles :

$$x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q}\sqrt{1 + 4Q^2} > 0 \quad \text{et} \quad x^2 + \frac{x}{Q} - 1 = 0 \longrightarrow x_2 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q}\sqrt{1 + 4Q^2} > 0$$

On ne conserve que les solutions donnant des pulsations réduites positives.

On obtient donc $\boxed{\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q} = \frac{1}{Q}}$

4. La fonction de transfert exprimée à la question 2 est équivalente à l'expression suivante $\underline{u}_r = \frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}\underline{e}$, soit :

$$\boxed{u_r(t) = \frac{E^2}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)\right)}$$

5. La puissance $\mathcal{P}_J(t)$ dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique est :

$$\mathcal{P}_J(t) = \frac{u_r^2(t)}{R} = \underbrace{\frac{\frac{E^2}{R}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}_{\mathcal{P}(\omega)} \cos^2\left(\omega t - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)\right)$$

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

On a donc en moyenne :

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\frac{E^2}{R}}{2\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

EXERCICE 2 Circuit RC parallèle (⋆)

1. En réglant l'impédance d'entrée R_∞ de l'oscilloscope sur 1 MΩ, le courant prélevé (qui passe dans l'oscilloscope) est quasi-nul, ce qui permet de faire une mesure sans perturber le fonctionnement du quadripôle.
2. • À basses fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert : $s(t) \underset{0}{\sim} \frac{R}{r+R}e(t)$.
   • À hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un fil, on a donc $s(t) \underset{+\infty}{\sim} 0$.

   Le comportement du filtre est caractéristique d'un filtre **passe-bas**.
3. L'impédance équivalente du condensateur et du conducteur ohmique montés en série est :
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{1}{R} + jC\omega \Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{R}{1+jRC\omega}}$$
4. À l'aide d'un pont diviseur de tension, on peut écrire :
$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}}+r} = \frac{R}{r+R+jrRC\omega} = \frac{R}{r+R} \times \frac{1}{1+j\frac{rR}{r+R}C\omega}}$$
   avec $\boxed{K = \frac{R}{r+R} \simeq 0,95}$ et $\boxed{\tau = \frac{rR}{r+R}C \simeq 476 \text{ ns}}$.
5. Le gain en décibels et la phase ont pour expression respectives :
$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log(K) - 10\log(1+(\tau\omega)^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{\Phi = -\arctan(\tau\omega)}$$
6. Le diagramme de Bode en gain et en phase du filtre RC parallèle est représenté en *Figure 8*. Il s'agit effectivement d'un filtre passe-bas du premier ordre avec une asymptote hautes fréquences à -20 dB/dec.

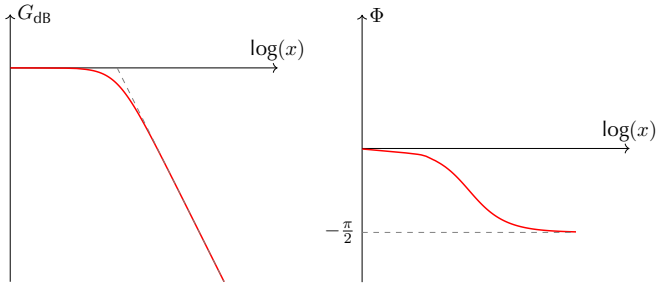


Figure 8 – Diagramme de Bode du circuit RC parallèle

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.