Induction

(Champ magnétique – Moment magnétique)

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Champ d'un dipôle (⋆)

Le champ magnétique créé par un dipôle magnétique $\overrightarrow{\mu} = \mu\,\overrightarrow{u_z}$ a pour expression en tout point P de l'espace (loin du dipôle magnétique) :

$$\overrightarrow{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi\rho^3}\left(3\left(\overrightarrow{\mu}\cdot\overrightarrow{u_\rho}\right)\overrightarrow{u_\rho} - \overrightarrow{\mu}\right)$$

1. Préciser l'expression du champ $\overrightarrow{B}(P)$ en projection selon les trois vecteurs de la base sphérique $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$.
2. Préciser l'équation $\rho(\theta)$ vérifiée par les lignes de champ.

EXERCICE 2 Équilibre d'un aimant (⋆)

On considère la situation représentée en *Figure* **??** : un aimant de masse m et de moment magnétique $\overrightarrow{\mu} = \mu\,\overrightarrow{u_x}$ est suspendu par un point d'attache en O alors que son barycentre est légèrement décalé d'une position x_G.

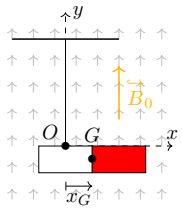


Figure 1 – Aimant en équilibre

Cet aimant est plongé dans un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B_0}$ suffisamment intense pour garder l'aimant à l'horizontale. Le champ magnétique homogène $\overrightarrow{B_0}$ exerce une action mécanique sur l'aimant de résultante nulle et de moment en G ayant pour expression :

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\mu} \wedge \overrightarrow{B_0}$$

1. Faire un bilan des forces auquel l'aimant est soumis.
2. Établir les équations d'équilibre de l'aimant.
3. En déduire une expression reliant la position x_G du barycentre à μ, m, g et B_0.

EXERCICE 3 Aimantation (⋆)

On trouve sur un site commercial les ordres de grandeur suivants pour des aimantations d'aimants permanents. L'aimantation correspond à un moment dipolaire magnétique par unité de volume.

Matériau	**Aimantation** (kA · m^{-1})
AℓNiCo 200	600
Ferrite 1000	1700
NdFeB	2000 à 4000
SmCo 5	2000 à 3000
SmCo 17	3500 à 5000

1. Rappeler la dimension d'un moment magnétique et vérifier si les unités proposées sont cohérentes avec la définition donnée de la grandeur aimantation.
2. Considérons un aimant en forme de disque d'épaisseur $e \simeq 1{,}0$ mm, et de rayon $R \simeq 5{,}0$ mm.
   - **a.** Calculer l'ordre de grandeur du moment magnétique d'un tel aimant en NdFeB (Néodyme-Fer-Bore).
   - **b.** Combien de spires de rayon R parcourues par une intensité de $0{,}1$ A faudrait-il bobiner pour obtenir le même moment magnétique ? Commenter.

L'essentiel

EXERCICE 4 Oscillations d'une boussole (⋆⋆)

On considère la situation représentée en *Figure 2* d'une aiguille aimantée (moment magnétique $\overrightarrow{\mu} = \mu\,\overrightarrow{u_r}$, moment d'inertie J) plongée dans un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B_0} = B_0\,\overrightarrow{u_x}$.

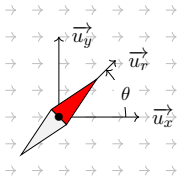


Figure 2 – Boussole dans un champ magnétique

Son interaction avec le champ magnétique extérieur (homogène) se traduit par l'existence d'un couple de la forme :

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\mu} \wedge \overrightarrow{B_0}$$

1. Préciser l'expression de ce couple en fonction de μ, B_0 et θ.
2. Montrer que l'aiguille placée dans le champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ aquiert une énergie potentielle dont l'expression est :

$$\mathcal{E}_{p_{\mu B}} = -\mu B_0 \cos(\theta) + \text{cte}$$

3. Étudier les positions d'équilibre de l'aiguille et leur stabilité. Préciser ainsi l'orientation stable de l'aiguille aimantée à l'équilibre.
4. On note J le moment d'inertie de l'aiguille. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ entre l'orientation de l'aiguille et celle du champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$.
5. Dans l'approximation des petits angles, résoudre cette équation différentielle pour une aiguille placée initialement au repos avec un angle θ_0 par rapport à la direction du champ magnétique.

EXERCICE 5 Les bobines de Helmoltz (⋆⋆)

1. Une spire de rayon R, d'axe $\overrightarrow{u_x}$ et située en $x = 0$ est parcourue par un courant électrique continu d'intensité I. Elle crée en un point M d'abscisse x de son axe un champ magnétique $\overrightarrow{B}_{\text{spire}}(x)$ dont l'amplitude s'exprime par

$$B_{\text{spire}}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{-3/2}$$

   À l'aide d'un schéma, préciser la direction de ce champ magnétique et discuter de son sens. En déduire une expression vectorielle $\overrightarrow{B}_{\text{spire}}$ si la spire est orientée positivement par rapport à l'axe de la spire, lui-même orienté par $\overrightarrow{u_x}$.
2. Déterminer alors le champ magnétique $\overrightarrow{B}_{\text{bobines}}(x)$ créé en un point M d'abscisse x de l'axe commun à deux bobines d'épaisseur négligeable, comprenant chacune N spires, parcourues par des courants de même sens et de même intensité et situées respectivement en $x = -e/2$ et $x = +e/2$. Faire un schéma représentant le système.
3. Tracer qualitativement l'amplitude $B_{\text{bobines}}(x)$ du champ $\overrightarrow{B}_{\text{bobines}}(x)$ en fonction de x, en faisant apparaitre la contribution de chaque bobine. On distinguera différents cas selon que e est plus grand ou plus petit qu'une valeur critique e_0 (qu'on ne cherchera pas à déterminer). Quel est l'intérêt pratique du cas $e = e_0$?
4. À partir de l'étude de la courbe $B_{\text{spire}}(x)$ et de l'observation de ses points d'inflexion, justifier sans aucun calcul que, pour cette valeur particulière e_0 de e, la fonction $B_{\text{bobines}}(x)$ puisse être considérée comme constante à l'ordre trois au voisinage de 0. On ne cherchera pas à calculer e_0, mais uniquement à décrire les variations de $B_{\text{bobines}}(x)$ au voisinage de 0 pour $e = e_0$.

EXERCICE 6 Définition légale de l'ampère (⋆⋆)

Deux fils parallèles sont parcourus par des courants de même intensité $I \simeq 6{,}0$ A, dans des sens contraires ; ils sont distants de $d \simeq 6{,}0$ cm.

1. Le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité i a pour expression $\overrightarrow{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,\overrightarrow{u_\theta}$ en coordonnées cylindriques d'axe l'axe du fil. Donner en chaque point du segment $[MM']$ du fil (2), la direction, le sens et la valeur du champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ créé par le fil (1) à la distance $d \simeq 6{,}0$ cm.
2. Donner les caractéristiques de la force électromagnétique qui s'exerce sur la portion $[MM']$ de longueur $\ell \simeq 50$ cm du fil (2) placé dans le champ du fil (1). Représenter cette force.
3. Donner les caractéristiques du champ magnétique $\overrightarrow{B_2}$ créé par le fil (2) en chaque point du segment $[NN']$ de longueur $\ell \simeq 50$ cm du fil (1). Quelles sont les caractéristiques de la force de Laplace qui s'exerce sur le fil (1) placé dans $\overrightarrow{B_2}$?

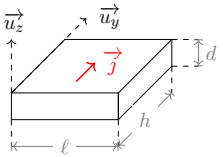
Jusqu'en 2019, l'ampère était défini comme l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-7} newton par mètre de longueur (BIPM, 1948).

4. En déduire la valeur de μ_0.

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Effet Hall (⋆⋆)

Un semi conducteur parallélépipédique (ayant n électrons de conduction par m^3) est utilisé comme sonde à effet Hall à l'intérieur d'une pince ampèremétrique.



Une source de courant, intégrée dans la pince, alimente la sonde avec une densité de courant j. La pince entoure un fil parcouru par un courant i qui crée dans la pince un champ homogène $\overrightarrow{B}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{j}$.

1. Exprimez la vitesse de dérive moyenne v_d des électrons dans le semi-conducteur et représentez cette vitesse sur le schéma.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. En déduire l'expression de la force magnétique moyenne qui s'applique sur les électrons du semi conducteur et représentez cette force sur le schéma.
3. Montrez qu'un champ électrique $\overrightarrow{E}_H$ apparaît perpendiculaire à $\overrightarrow{j}$. Représentez ce champ et la force électrique qui en découle.
4. À l'état stationnaire, c'est-à-dire lorsque l'équilibre des forces est réalisé, exprimez $\overrightarrow{E}_H$ en fonction des données du problème. En déduire l'expression de la tension de Hall U_H.
5. Le matériau magnétique à l'intérieur de la pince concentre les lignes de champ magnétique engendrées par le courant i. Il en résulte que le champ B dans la pince peut être considéré homogène avec une valeur égale à celui créé par un fil infini à une distance moyenne égale au rayon a de la pince (il faut cependant remplacer μ_0, la perméabilité magnétique du vide, par $\mu = \mu_r\mu_0$ la perméabilité magnétique du matériau).
   - **a.** Calculez le champ magnétique dans la pince lorsque $i \simeq 1$ A, $a \simeq 1$ cm et $\mu_r \simeq 1000$.
   - **b.** En déduire la tension de Hall U_H mesurée à l'aide de la pince sachant que $n = 10^{15}$ cm^{-3}, $J = 50 \times 10^3$ A $\cdot$ m^{-2} et $\ell = 2,0$ mm.

EXERCICE 8 Sphère chargée en rotation (⋆⋆⋆)

On considère la situation représentée en *Figure 3* d'une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, de charge électrique totale Q. La sphère est mise en rotation par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{u_z})$ à la vitesse angulaire ω.

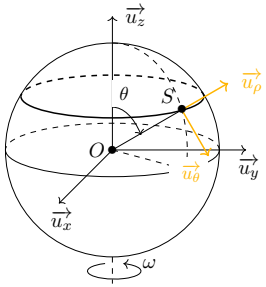


Figure 3 – Sphère chargée en rotation

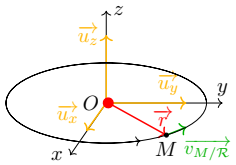
1. Exprimer la densité volumique de charge ρ en fonction de Q et R.
2. Exprimer la charge électrique élémentaire $\mathrm{d}q$ contenue dans un volume $\mathrm{d}^3\tau = r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ en fonction de ρ.
   La rotation de la sphère chargée est assimilée à un ensemble de spires de rayon $r\sin(\theta)$ parcourues par un courant d^2i.
   - **a.** Préciser l'expression de d^2i en fonction de ρ, ω, $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$, r et θ.
   - **b.** Montrer que le moment magnétique élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}$ créé par cette spire élémentaire parcourue par un courant d^2i peut s'écrire sous la forme :
   $$\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mu} = \alpha r^4\sin^3(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_z}$$
   où l'expression de α sera détaillée en fonction de ρ et ω.
   - **c.** Calculer le moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ de la sphère chargée.
   Données : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{3}\cos^3(\theta) - \cos(\theta)\right) = \sin^3(\theta)$.

   Le moment d'inertie d'une sphère de rayon R et de masse m est :
   $$J = \frac{2}{5}mR^2$$
   - **d.** Montrer que l'on peut établir la relation suivante :
   $$\overrightarrow{\mu} = \frac{Q}{2m}\overrightarrow{L_O}(\mathcal{S})$$
   avec $\overrightarrow{L_O}(\mathcal{S})$ le moment cinétique en O de la sphère en rotation.

EXERCICE 9 RMN (⋆⋆⋆)

La RMN ou *Résonance Magnétique Nucléaire* exploite les propriétés magnétiques des atomes pour cartographier des molécules.

L'électron (de masse m_e et de charge $-e$) de l'atome d'hydrogène tournant autour du noyau protonique (de masse m_p et de charge $+e$) est semblable à une spire de courant, traversée par une intensité i.



PARTIE A : champ fixe $\overrightarrow{B}_0$:

1. En supposant que l'électron circule sur une orbite circulaire de rayon r, à la vitesse v, exprimer l'intensité i du courant dans la spire équivalente.
2. Donner l'expression du moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ de la spire de rayon r traversée pas un courant d'intensité i.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. Montrer que l'on peut exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}$ de l'électron à partir de son moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ selon la formule :
   $$\overrightarrow{\mu} = \gamma_e\overrightarrow{\sigma}$$
   avec γ_e le facteur gyromagnétique de l'électron, à exprimer en fonction de ses propriétés physiques.

On conserve la représentation de l'atome d'hydrogène sous forme d'un simple moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$. On soumet ce moment magnétique à un champ magnétique $\overrightarrow{B}_0 = B_0\ \overrightarrow{u_z}$. On repère alors l'angle $\theta = (\overrightarrow{B}_0, \overrightarrow{\mu})$ comme représenté sur le schéma de la *Figure 4*.

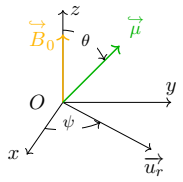


Figure 4 – Moment magnétique de l'atome d'hydrogène

4. Identifier l'expression du couple $\overrightarrow{\Gamma}$ auquel est soumis le dipôle magnétique en fonction de $\overrightarrow{B}_0$ et de $\overrightarrow{\mu}$.
5. Appliquer le théorème du moment cinétique à l'atome d'hydrogène et montrer que le moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ a un mouvement de précession autour du champ $\overrightarrow{B}_0$. On en déterminera la pulsation ω_0.
   On rappelle la formule de Bour pour dériver un vecteur $\overrightarrow{a}$ dans deux repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$:
   $$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{a}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{a}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{a}$$

PARTIE B : Champ tournant $\overrightarrow{B}_1$:

On rajoute un champ $\overrightarrow{B}_1 = B_1\ \overrightarrow{u_r} = \frac{\omega_1}{\gamma_e}\ \overrightarrow{u_r}$ tournant à la vitesse $\overrightarrow{\omega} = \omega\ \overrightarrow{u_z}$ dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ du laboratoire. On note $\mathcal{R}_1$ le référentiel accroché à cette base tournante.

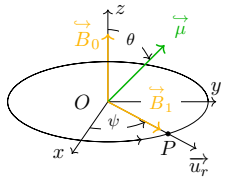


Figure 5 – Moment magnétique dans un champ tournant

6. Identifier l'expression du couple $\overrightarrow{\Gamma}^*$ auquel est soumis le moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ sous l'influence des champs magnétiques $\overrightarrow{B}_0$ et $\overrightarrow{B}_1$.
7. En déduire l'expression de $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1}$ en fonction de γ_e, $\overrightarrow{\mu}$, $\overrightarrow{B}_0$ et $\overrightarrow{B}_1$.
8. Montrer que le mouvement du moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ est régi par l'équation différentielle suivante :
   $$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \gamma_e\overrightarrow{B}_{\text{eff}} \wedge \overrightarrow{\mu}$$
   où $\overrightarrow{B}_{\text{eff}}$ est un champ magnétique équivalent dont l'expression est à déterminer.
9. Identifier le mouvement du moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ lorsque la vitesse de rotation du champ $\overrightarrow{B}_1$ est $\omega = \omega_0$.

PARTIE C : Relaxation :

Lorsque l'on coupe brutalement le champ magnétique $\overrightarrow{B}_1$, l'évolution du moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ est régie par une action mécanique supplémentaire de la forme
$$-\frac{\mu_z\ \overrightarrow{u_z}}{\tau_1} - \frac{\overrightarrow{\mu_\perp}}{\tau_2}$$
On note $\mu_z(t) = \overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{\mu_\perp}(t) = \overrightarrow{\mu} - \mu_z\ \overrightarrow{u_z}$.

10. En posant $\overrightarrow{\mu_1} = \overrightarrow{\mu_\perp}e^{\frac{t}{\tau_2}}$, montrer que :
    $$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mu_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{\omega_0} \wedge \overrightarrow{\mu_1}$$
11. En déduire les expressions de $\mu_z(t)$ et $\mu_\perp(t)$ et décrire l'évolution de $\overrightarrow{\mu}$ durant la relaxation.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 1 Champ d'un dipôle (⋆)

1. Dans la base sphérique, l'expression du champ magnétique est :

$$\boxed{\overset{\hookrightarrow}{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi\rho^3}\left(2\mu\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_\rho} + \mu\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}\right)}$$

2. L'équation vérifiée par les lignes de champ est trouvée en posant :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\tau} \wedge \overset{\hookrightarrow}{B} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{d}\rho \\ \rho\mathrm{d}\theta \\ \rho\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{2\mu_0\mu\cos(\theta)}{4\pi\rho^3} \\ \frac{\mu_0\mu\sin(\theta)}{4\pi\rho^3} \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

soit :

$$\sin(\theta)\mathrm{d}\rho - 2\rho\cos(\theta)\mathrm{d}\theta = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\varphi = 0$$

On a donc : $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = 2\rho\mathrm{cotan}(\theta) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 2\mathrm{cotan}(\theta)\mathrm{d}\theta$
soit :

$$\ln(\rho) = 2\ln(|\sin(\theta)|) + \ln(K), K \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\rho(\theta) = K\sin^2(\theta)}$$

EXERCICE 2 Équilibre d'un aimant (⋆)

1. L'aimant est soumis :
   - à son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$ s'exerçant au point G. Son moment en O est $\overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{P}\right) = -mgx_G\,\overrightarrow{u_z}$.
   - à la tension $\overrightarrow{T} = +T\,\overrightarrow{u_y}$ du fil s'exerçant en O.
   - au couple magnétique de moment $\overset{\hookrightarrow}{\tau} = \overset{\hookrightarrow}{\mu} \wedge \overset{\hookrightarrow}{B_0}$.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, on peut ainsi écrire, en l'absence de mouvement :

$$\overset{\hookrightarrow}{0} = \overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{P}\right) + \overset{\hookrightarrow}{\mathscr{M}}_O\left(\overrightarrow{T}\right) + \overset{\hookrightarrow}{\tau}$$

3. En projetant cette équation selon $\overrightarrow{u_z}$, on en déduit que :

$$0 = -mgx_G + 0 + \mu B_0$$

soit :

$$\boxed{x_G = \frac{\mu B_0}{mg}}$$

EXERCICE 3 Aimantation (⋆)

1. Le moment magnétique est généralement exprimé en $\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$. Comme l'aimantation correspond à un moment magnétique divisé par un volume, on a :

$$[J] = \frac{[\mu]}{[V]} = \frac{\mathrm{I}\cdot\mathrm{L}^2}{\mathrm{L}^3}$$

L'unité de l'aimantation sera ainsi des $\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{m}^{-3} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. **a.** En supposant que l'aimantation du milieu est homogène, on peut écrire que :

$$\boxed{\mu = J \times e \times \pi R^2 \simeq 0,15 \text{ à } 0,30\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2}$$

b. Le moment magnétique d'une spire est $\pi R^2 i$ avec i l'intensité du courant qui traverse la spire. On aura donc pour N spires :

$$\mu = N\pi R^2 i \Rightarrow \boxed{N = \frac{\mu}{\pi R^2 i} \simeq 20\,000 \text{ à } 40\,000 \text{ spires}}$$

Il est impossible de trouver une telle bobine si petite.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/