Mécanique

(Mécanique vibratoire)

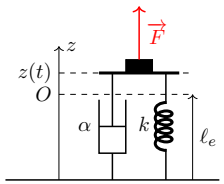
Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Vibrations d'un moteur (⋆⋆)

Lors du fonctionnement d'un moteur (de compresseur par exemple), il existe des vibrations du châssis qui entoure le moteur. Il est alors nécessaire de prévoir un système de suspension.

Le moteur est assimilé à un point matériel de masse m. La suspension peut être modélisée par un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce une force de freinage

$$\vec{f}_d = -\alpha \dot{z} \vec{e}_z.$$



L'origine O de l'axe (Oz) vertical ascendant est confondue avec la position du moteur lorsqu'il ne fonctionne pas et qu'il est immobile. La longueur du ressort est alors égale à ℓ_e.

Quand le moteur fonctionne, tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire sinusoïdale

$$\vec{F} = kA\cos(\omega t)\vec{e}_z,$$

A étant une constante positive.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\beta = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}$.

1. À l'équilibre, sans force excitatrice, que vaut ℓ_e ?
2. Établir l'équation différentielle du mouvement de M, d'élongation $z(t)$:

$$\ddot{z} + 2\omega_0\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 A\cos(\omega t). \qquad (1)$$

3. Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire d'oscillations du point M (qui précède l'établissement du régime sinusoïdal forcé) dans le cas d'un faible amortissement (qu'on définira précisément) ? Justifier rigoureusement votre réponse.

En régime sinusoïdal forcé, $F = \mathrm{Re}\{kA\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$. On recherche alors $z(t)$ sous la forme $z(t) = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ avec $\underline{Z} = \mathcal{Z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, avec $\mathcal{Z}$ l'amplitude du mouvement du moteur et φ son déphasage par rapport à l'excitation. On notera $\underline{z}$ la grandeur complexe associée à $z(t)$.

4. a. Comment se transforment $\dot{z}$ et $\ddot{z}$ en notation complexe ?
   b. Dans le cas de mouvements très rapides (donc de très grandes fréquences), quel est le terme prépondérant (dans le premier membre de (1)) ? Donner alors l'expression approchée de $z(t)$. Comparer l'amplitude et le déphasage de z par rapport à ceux de l'excitation.
   c. Mêmes questions dans le cas de mouvements très lents.
5. a. Montrer que l'amplitude $\mathcal{Z}$ de $z(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{Z} = \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\beta^2 x^2}} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

   b. Tracer son allure en fonction du rapport x. On distinguera deux cas selon la valeur du paramètre β. Retrouve-t-on les résultats établis à la *question* 4 ?
   c. On veut se limiter à des vibrations dont l'élongation est toujours inférieure à la valeur A, c'est-à-dire éviter le phénomène de résonance. Quelles sont alors les valeurs permises pour le paramètre β ?
6. Tracer le déphasage φ en fonction du rapport x. Retrouve-t-on les résultats établis à la question 4 ?

Donnée : la fonction $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2+4x^2\beta^2}}\right)$ est monotone.

EXERCICE 2 Pendules couplés par un ressort (⋆⋆)

On considère le système constitué par l'ensemble de deux tiges identiques, de longueur L, de masse m et d'un ressort idéal, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les tiges peuvent tourner, par l'intermédiaire de liaisons pivots parfaites, autour des axes $(O_1, \vec{u_z})$ et $(O_2, \vec{u_z})$ fixes dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen.

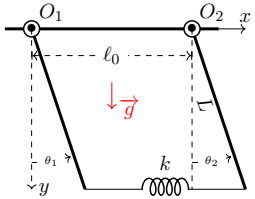


Figure 1 – Pendules et ressort couplés

On repère les positions des deux barres par les angles θ_1 et θ_2, représentés en *Figure 1*.

Les extrémités opposées des tiges sont liées par le ressort. Lorsque les angles sont nuls, la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide ℓ_0. On suppose qu'au cours du mouvement ce dernier reste constamment horizontal. À $t = 0$ on écarte les tiges des angles θ_{1_0} et θ_{2_0}, et on les abandonne sans vitesse intitiale.

On posera $\omega_1^2 = \frac{3k}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{3g}{2L}$. On donne le moment d'inertie de chaque tige par rapport à son axe de rotation : $J = \frac{mL^2}{3}$.

1. Au cours du mouvement, exprimer ℓ, longueur approximative du ressort à l'instant t, en fonction de ℓ_0, L, θ_1 et θ_2.
2. Déterminer deux équations différentielles couplées liant θ_1 et θ_2.
3. Pour $\theta_{1_0} = \theta_{2_0} = \theta_0$, exprimer $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
4. Pour $\theta_{1_0} = -\theta_{2_0} = \theta_0$, exprimer $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

L'essentiel

EXERCICE 3 Sismographe (⋆)

On considère le dispositif schématisé en *Figure 2*, avec :

- Un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0
- Un amortisseur exerçant sur M une force $\vec{f} = -\mu\dot{z}\vec{u_z}$.

On repère la position du point M dans le référentiel lié au socle grâce à un stylet sur un tambour tournant. On note $z(t)$ le déplacement de M dans ce référentiel par rapport à sa position à l'équilibre du système. La croûte terrestre a, suite à un tremblement de terre, une oscillation verticale dans le référentiel terrestre supposé galiléen repérée par $a(t) = A_0\cos(\omega t)$.

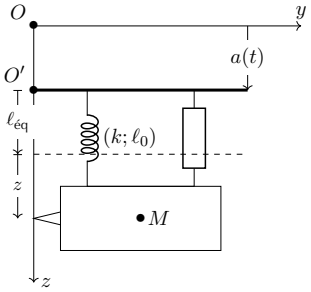


Figure 2 – Sismographe

1. Déterminer la longueur $\ell_{éq}$ du ressort en l'absence de toute vibration. On prendra ensuite l'origine $z = 0$ à cette position.
2. En régime permanent, on aura $z(t) = Z_0\cos(\omega t + \varphi)$. Déterminer $\alpha = \frac{Z_0}{A_0}$ en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\mu}$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
3. Donner l'allure de $\alpha(\omega)$ pour : $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. En déduire le choix de Q parmi les trois valeurs proposées de manière à ce que le domaine des pulsations d'utilisation de cet appareil en tant que sismographe soit le plus étendu possible.
5. La gamme de fréquence des ondes transversales pour un séisme va de 1 à 8 Hertz. Proposer des valeurs de m, k et μ.

EXERCICE 4 Le ciel bleu (⋆⋆)

Thomson a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) (il est soumis à une force de rappel passant par le centre de l'atome $\vec{F_e} = -k\overrightarrow{OM}$). Nous supposerons que cet électron est freiné par une force de frottement de type fluide, proportionnelle à sa vitesse $\vec{F_r} = -h\vec{v}$ et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Nous cherchons à étudier l'action d'une onde lumineuse caractérisée par un champ électrique $\vec{E} = E_0\cos(\omega t)\ \vec{u_x}$, de pulsation ω (provenant du Soleil) sur un électron d'un atome de l'atmosphère, représenté à l'aide du modèle de Thomson.

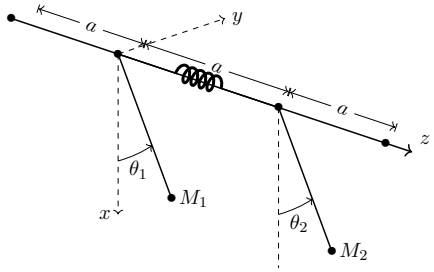
Données : : $m \simeq 9,1\times10^{-31}$ kg ; $e \simeq 1,6\times10^{-19}$ C ; $k \simeq 100$ N · m^{-1} ; $h \simeq 10^{-20}$ kg · s^{-1}.

1. Donner l'expression de la fonction de transfert canonique d'un filtre passe-bas d'ordre deux. Préciser les valeurs aymptotiques de la phase et du gain en décibels d'un tel filtre.
2. Écrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement de l'électron, puis la normaliser.
3. Déterminer le régime forcé (solution particulière de l'équation différentielle).
4. Simplifier l'expression précédente sachant que le rayonnement visible provenant du Soleil possède des longueurs d'onde s'étendant de $\lambda_b \simeq 400$ nm (bleu) à $\lambda_r \simeq 800$ nm (rouge), longueurs d'onde du champ $\vec{E}(t)$.
5. Sachant que l'électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération, expliquer pourquoi le ciel est bleu.

EXERCICE 5 Deux pendules couplés (⋆⋆)

Un câble de torsion de longueur $3a$ est fixé par ses extrémités à un support immobile. Deux pendules (m, l) identiques sont soudés sur le câble, aux abscisses $x_1 = a$ et $x_2 = 2a$.

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.



La tension du câble est telle qu'il reste rectiligne (selon $\vec{e}_x$). Lorsque les sections, délimitant une portion de câble de longueur a, tournent d'un angle de torsion relatif $\Delta\theta$, cette portion est alors soumise à un couple, parallèle à l'axe du câble : $C\,|\Delta\theta|$, $(C > 0)$. Tout phénomène dissipatif est négligé.

1. Préciser dans quelle mesure il devient légitime de négliger les phénomènes dissipatifs. On donnera des critères qualitatifs, sans calcul.
2. Établir les équations différentielles couplées régissant la dynamique du système. On fera apparaître deux pulsations caractéristiques $\omega_g \triangleq \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\omega_c \triangleq \sqrt{\frac{C}{ml^2}}$ dont on donnera une interprétation physique.
3. Nous introduisons les nouvelles variables $\theta_+ = \theta_1 + \theta_2$ et $\theta_- = \theta_1 - \theta_2$.
   - **a.** Établir le système d'équations différentielles qu'elles vérifient.
   - **b.** Préciser l'intérêt de ce changement de variables.
4. **a.** Décrire le mouvement des deux pendules correspondant à chacun des deux états particuliers $(\theta_+(t)\,;\,\theta_-(t) = 0)$ et $(\theta_+(t) = 0\,;\,\theta_-(t))$, appelés modes propres.
   - **b.** Exprimer les pulsations correspondantes, appelées pulsations propres et notées $\omega_{1,1}$ et $\omega_{1,-1}$, en fonction de ω_g et ω_c.
   - **c.** Pour un mode propre, justifier que les deux pendules oscillent à la même pulsation.
   - **d.** En considérant la torsion des différentes portions du câble, retrouver directement l'expression de $\omega_{1,1}$, ou celle de $\omega_{1,-1}$. Choix que l'on précisera.

Données : $g = 10$ m · s^{-2}, $m = 20$ g, $a = 1$ cm, $l = 10$ cm *et* $C = 20$ Nm · rad^{-1}

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Deux ressorts pendus (⋆⋆)

On considère les mouvements de translation verticale de M_1 et de M_2 (masselotts identiques) définis par leurs abscisses $x_1(t)$ et $x_2(t)$ repérées par rapport à leur position d'équilibre x_{10} et x_{20}. La masse M_2 est soumise à une force excitatrice sinusoïdale (régime harmonique) de pulsation ω réglable : $F(t) = F_0\cos(\omega t)$.

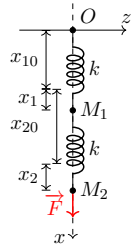


Figure 3 – Système masses-ressorts

1. Écrire le système d'équations différentielles du second ordre en x_1 et x_2.
2. En régime forcé, une solution particulière de ce système d'équations est de la forme (en notation complexe)

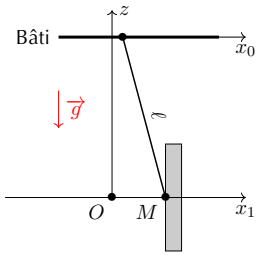
$$x_1 = A_1 e^{j(\omega t+\varphi_1)} \quad \text{et} \quad x_2 = A_2 e^{j(\omega t+\varphi_2)}$$

   - **a.** Pour quelle valeur ω_0 de ω la masse M_2 demeure-t-elle immobile ?
   - **b.** Pour quelles valeurs ω' et ω'' de ω (à exprimer en fonction de ω_0) le système est-il en résonance d'amplitude ?
3. Dans quels domaines de pulsations les masses vibrent-elles en phase et en opposition de phase avec la force extérieure ?
4. Tracer l'allure des graphes $A_1(\omega)$ et $A_2(\omega)$.

EXERCICE 7 Suspensions de miroirs (⋆⋆⋆)

PARTIE A : Suspension à un pendule :

Afin de stabiliser un miroir M d'interféromètre réalisant des mesures de précision (déplacements de $\delta x \sim 10^{-18}$ m liés à la détection d'ondes gravitationnelles), un système de suspensions pendulaire de longueur ℓ est intercalé entre le miroir M et le bâti de l'interféromètre selon le schéma ci-dessous.



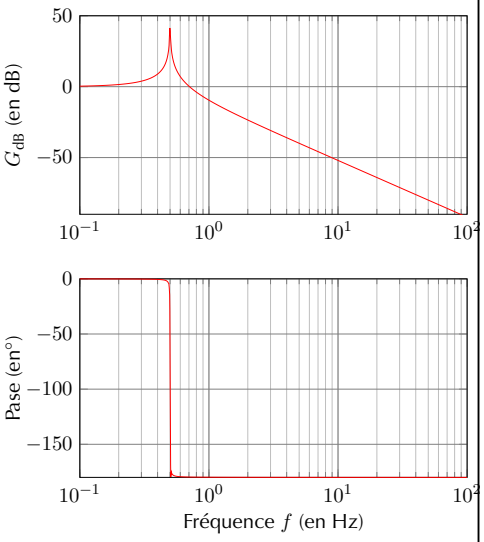
On note x_1 la position horizontale du miroir M (de masse αm) et x_0 la position horizontale du bâti (du fait des vibrations, de l'ordre de $x_0 \sim 1$ nm) par rapport à un axe $(O, \vec{u_z})$ fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Le miroir est soumis à son propre poids et à une force d'amortissement de la forme :

$$\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\dot{x}_1\,\vec{u_x}$$

avec τ un temps caractéristique.

1. Établir l'équation permettant de déterminer $x_1(t)$ connaissant $x_0(t)$ dans la limite des petits déplacements. On introduira la pulsation propre d'oscillation du système ω_0 et T la tension du fil que l'on exprimera.
2. En notant $\underline{x_0}$ et $\underline{x_1}$ les représentations complexes respectives de x_0 et x_1, trouver la relation liant $\underline{x_0}(\omega)$ et $\underline{x_1}(\omega)$ et établir la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{x_1}(\omega)}{\underline{x_0}(\omega)}$.
3. Le diagramme de Bode correspondant à la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ est représenté ci-dessous pour $\ell \simeq 1$ m et $\tau \simeq 100$ s. Conclure quant à la nature de ce système de filtrage. Par quel type de filtre peut-on caractériser le système si on se restreint aux fréquences supérieures à 1 Hz ?



4. Évaluer l'amplitude des vibrations $|\underline{x_1}|$ à $f \simeq 10$ Hz et conclure quant à la détection des déplacements de l'ordre de $\delta x \sim 10^{-18}$ m.

PARTIE B : Suspension à N pendules :

Afin d'améliorer l'amortissement du bruit, le miroir peut être suspendu sur une chaîne de $N = 7$ pendules identiques de masse ponctuelle m, de longueur ℓ et de temps d'amortissement τ. On note $x_i(t)$ la position horizontale du miroir $i \in [\![1; N]\!]$ et $\underline{x_i}$ sa représentation complexe. Chaque pendule effectue de petites oscillations autour de leur position d'équilibre en étant soumis à une force d'amortissement visqueux de la forme :

$$\vec{f}_i = -\frac{m}{\tau}\dot{x}_i(t)\,\vec{u_x}$$

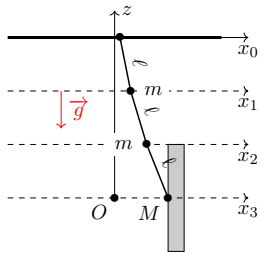


Figure 4 – Système de suspension pendulaire pour $N = 3$ pendules.

5. Établir l'équation différentielle donnant la position du miroir $x_N(t)$ en fonction de la position du pendule précédent $x_{N-1}(t)$. Montrer que la tension exercée par le fil i sur la masse i s'écrit $T_i = [\alpha + N - i]mg$ pour $i < N$ puis donner l'équation différentielle sur la position du pendule $i < N$ en fonction de celles des pendules $i-1$ et $i+1$.
6. Montrer que l'on peut écrire les équations précédentes sous la forme :

$$\underbrace{(1 + A_0)\underline{x_N}}_{A_N} = \underline{x_{N-1}}$$

$$A_i\underline{x_i} = (\alpha + N - i)\,\underline{x_{i-1}} + (\alpha + N - i - 1)\,\underline{x_{i+1}}$$

avec $A_0 = \frac{\frac{i\omega}{\tau} - \omega^2}{\omega_0^2}$ et $A_i = A_0 + 2\,(\alpha + N - i) - 1$ pour $0 < i < N$.

7. Montrer que dans le régime $\omega \gg \omega_0$ et avec $\alpha = 4$, $A_i \in \mathbb{R}$ et $|A_i| \gg 1$ pour $i \in [\![1; N]\!]$.
8. Montrer que la fonction de transfert $\underline{H_i}(\omega) = \frac{\underline{x_i}(\omega)}{\underline{x_{i-1}}(\omega)}$ s'écrit :

$$\underline{H_i}(\omega) = \frac{\underline{x_i}(\omega)}{\underline{x_{i-1}}(\omega)} \simeq \frac{1}{A_0}\,(\alpha + N - i)$$

9. Montrer que la fonction de transfert totale $\underline{H_{\text{tot}}}(\omega) = \frac{\underline{x_N}(\omega)}{\underline{x_0}(\omega)}$ $(0 \leq i < N)$ s'écrit :

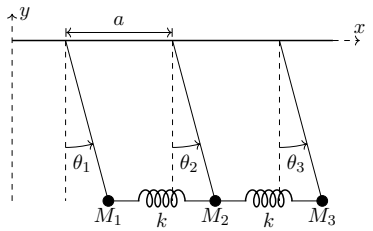
$$\underline{H_{\text{tot}}}(\omega) = \frac{\underline{x_N}(\omega)}{\underline{x_0}(\omega)} = \frac{1}{A_0^N}\prod_{i=1}^{N-1}(\alpha + i)$$

et calculer numériquement l'atténuation résultante $\left|\underline{H_{\text{tot}}}(\omega)\right|$ à $f \simeq 10$ Hz pour $\alpha = 4$ et $N = 7$.

10 Des déplacements de $\delta x \sim 10^{-18}$ m liés à la détection d'ondes gravitationnelles sont-ils mesurables avec ce dispositif ?

EXERCICE 8 Chaîne de pendules (⋆⋆⋆)

Considérons les trois pendules représentés ci-contre, de longueur ℓ. À l'équilibre ces trois pendules sont verticaux, les trois masses sont équidistantes sur une même horizontale et les ressorts ont leur longueur au repos. On pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\Omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$.



1 Déterminer le système d'équations différentielles vérifiées par les élongations angulaires θ_i pour de petites oscillations.

2 Déterminer les pulsations propres de ce système.

3 Déterminer les matrices de raideur K et d'inertie M du système. Montrer que l'on peut écrire :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\dot{\theta}^t M \dot{\theta} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\theta^t K \theta$$

avec $\theta = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}$.

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

EXERCICE 1 Vibrations d'un moteur (⋆⋆)

1 Le système est le moteur M, étudié dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Le principe fondamental de la statique appliqué à M dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f}_d + \overrightarrow{F}_r = -mg - k(\ell_e - \ell_0) \Rightarrow \boxed{\ell_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

2 Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans $\mathcal{R}$ (avec la force $\overrightarrow{F}$ qui se rajoute) s'écrit donc :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f}_d + \overrightarrow{F}_r \Rightarrow m\ddot{z} = kA\cos(\omega t) - mg - \alpha\dot{z} - k(\ell - \ell_0)$$

On obtient ainsi, on posant $z = \ell - \ell_e = \ell - \ell_0 + \frac{mg}{k}$:

$$\ddot{z} = \frac{k}{m}A\cos(\omega t) - \frac{\alpha}{m}\dot{z} - \frac{k}{m}z$$

soit :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}A\cos(\omega t)}$$

On peut donc identifier $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{\beta = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}}$.

3 En identifiant l'homogénéité des termes constants de l'équation différentielle, on observe que $2\beta\omega_0$ est homogène à l'inverse d'un temps : c'est le temps caractéristique $\tau = \frac{1}{\beta\omega_0}$ d'un faible amortissement.

Le signal sera faiblement amorti ($\beta \ll 1$) présentera donc des pseudo-pulsations amorties par une enveloppe exponentielle $\pm e^{-\omega_0\beta t}$.

$$z(t) = A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\beta^2}t + \varphi\right)e^{-2\omega_0\beta t}$$

Au bout de $5\tau = \frac{5}{\beta\omega_0}$, 99% du régime transitoire a disparu.

4 **a.** En complexes, on a $\dot{z} = \mathfrak{Re}\left(j\omega\underline{Z}e^{j\omega_0 t}\right)$ et $\ddot{z} = \mathfrak{Re}\left((j\omega)^2\underline{Z}e^{j\omega_0 t}\right)$.

b. Dans un mouvement très rapide, $\omega \gg \omega_0$, donc :

$$\ddot{z} \simeq \omega_0^2 A\cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{z(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}A\cos(\omega t - \pi)}$$

L'amplitude est donc divisée par un facteur ω^2 par rapport à l'excitation et le signal se retrouve en **opposition de phase** ($\Phi(\omega) = -\pi$) par rapport à l'excitation.

c. Dans le cas de mouvement très lents, le terme prépondérant est celui en $\omega_0^2 z(t)$, on a $\boxed{z(t) \simeq A\cos(\omega t)}$: autrement dit, la vibration est intégralement transmise (même amplitude et même phase).

5 **a.** En prenant la transformée de Fourier pour les signaux harmoniques $z(t)$, on obtient :

$$-\omega^2\underline{Z}e^{j\omega t} + 2\omega_0\beta j\underline{Z}\omega e^{j\omega t} + \omega_0^2\underline{Z}e^{j\omega t} = \omega_0^2 A e^{j\omega t}$$

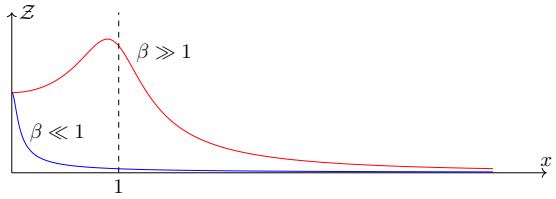
En organisant les termes, on obtient :

$$\underline{Z} = \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\beta\omega\omega_0} = \frac{A}{(1-x^2) + 2j\beta x}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Donc $\mathcal{Z} = |\underline{Z}| = \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\beta^2 x^2}}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

b. Les deux graphes sont tracés ci-dessous :

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.



Pour $x \gg 1$, on a bien $\mathcal{Z} \to 0$ et pour $x \ll 1$ on a bien $\mathcal{Z} \to A$ donc on retrouve bien les résultats de la question 4.

c. Il y a résonance si $\mathcal{Z}$ présente un maximum pour $x \neq 0$, soit, en posant $x^2 = X$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left((1-X)^2 + 4\beta^2 X\right) = 0 \Leftrightarrow -2(1-X) + 4\beta^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 - 2\beta^2$$

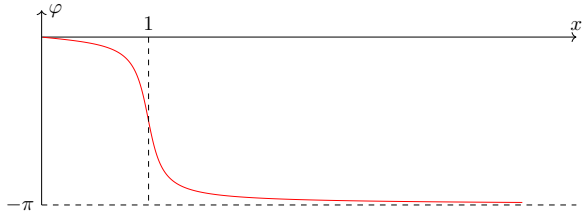
Cette solution n'existe que si $\beta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, sinon $X < 0$ ce qui n'a pas de sens.

Les valeurs permises pour β sont alors $\beta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$.

d. Comme $\underline{Z} = \frac{A}{(1-x^2)+2j\beta x}$, on en déduit que $\varphi = \arg(\underline{Z})$, soit :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1-x^2}{2\beta x}\right)$$

Le tracé est représenté ci-dessous :



On a bien $\varphi \to 0$ pour $x \ll 1$: les signaux sont en phase et $\varphi \to -\pi$ pour $x \gg 1$: les signaux sont en opposition de phase. On retrouve donc bien les mêmes résultats qu'en question 4.

EXERCICE 2 Pendules couplés par un ressort (**)

1 La longueur du ressort est $\ell = \ell_0 + L\sin(\theta_2) - L\sin(\theta_1)$.
Dans l'approximation des petits angles, on obtient ainsi :

$$\boxed{\ell = \ell_0 + L(\theta_2 - \theta_1)}$$

2 Le théorème du moment cinétique appliqué à chaque barre s'écrit ainsi :

$$J\ddot{\theta_1} = -\frac{mgL}{2}\sin(\theta_1) + kL(\theta_2-\theta_1)L\cos(\theta_1) \quad \text{et} \quad J\ddot{\theta_2} = -\frac{mgL}{2}\sin(\theta_2) - kL(\theta_2-\theta_1)L\cos(\theta_2)$$

Dans l'approximation des petits angles, on obtient ainsi :

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{mgL}{2J}\theta_1 = \frac{kL^2}{J}(\theta_2-\theta_1) \quad \text{et} \quad \ddot{\theta}_2 + \frac{mgL}{2J}\theta_2 = -\frac{kL^2}{J}(\theta_2-\theta_1)$$

soit :

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{3g}{2L}\theta_1 = \frac{3k}{m}(\theta_2-\theta_1) \quad \text{et} \quad \ddot{\theta}_2 + \frac{3g}{2L}\theta_2 = -\frac{3k}{m}(\theta_2-\theta_1)$$

En utilisant les notations de l'énoncé, on a ainsi :

$$\boxed{\ddot{\theta_1} + \omega_0^2\theta_1 = \omega_1^2(\theta_2-\theta_1)} \quad \text{et} \quad \boxed{\ddot{\theta_2} + \omega_0^2\theta_2 = -\omega_1^2(\theta_2-\theta_1)}$$

3 Pour découpler le système, on travaille avec les variables $S(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$ et $A(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ vérifiant les équations différentielles suivantes :

$$\ddot{S} + \omega_0^2 S = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{A} + (\omega_0^2 + 2\omega_1^2)A(t) = 0$$

Soit :

$$\begin{cases} S(t) &= 2\theta_0\cos(\omega_0 t) \\ A(t) &= 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\theta_1(t) = \frac{S+A}{2} = \theta_0\cos(\omega_0 t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta_2(t) = \frac{S-A}{2} = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$$

4 De la même manière, à partir de nouvelles conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} S(t) &= 0 \\ A(t) &= 2\theta_0\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}t\right) \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\theta_1(t) = \frac{S+A}{2} = \theta_0\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}t\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta_2(t) = \frac{S-A}{2} = -\theta_0\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}t\right)}$$

Le système a été mis en oscillations selon ses deux modes propres S et A. Les pulsations propres associées à chaque mode sont ω_0 et $\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}$.

Document réservé à un usage privé. Toute reproduction à des fins commerciales est interdite. Toute reproduction du document, totale ou partielle, doit faire apparaître son origine et son auteur.