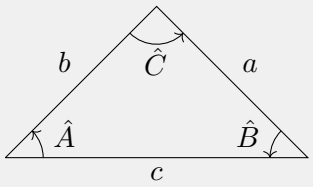
# Optique géométrique

**Outil mathématique : Relation des sinus dans un triangle**

La relation des sinus dans un triangle quelconque s'écrit :

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$




## Pour réviser le cours

### EXERCICE 1 Dispersion par le verre (⋆)

On mesure l'indice d'un verre pour différentes longueurs d'onde dans le vide :

| $\lambda$ (nm) | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n(\lambda)$ | 1,500 | 1,489 | 1,482 | 1,479 | 1,476 |

Fig 1. Relevé expérimental.

On veut déterminer les coefficients $A$ et $B$ de la relation de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

1. Déterminer les unités de $A$ et de $B$. Préciser la couleur de l'onde correspondant à chaque longueur d'onde $\lambda$ présente dans le tableau de la *Figure 1*.
2. Expliquer pourquoi il ne faut pas étudier $n$ en fonction de $\lambda$, mais $n$ en fonction de $\frac{1}{\lambda^2}$.
3. Déterminer $A$ et $B$ par régression linéaire. En déduire $n$ pour $\lambda \simeq 633$ nm.
4. Exprimer et calculer la vitesse de propagation $v(\lambda)$ d'une onde lumineuse de longueur d'onde $\lambda$ dans ce milieu. Quelle propriété du milieu est mise en évidence à travers ces calculs ?

*Données :* $c \simeq 2,9979 \times 10^8$ m · s$^{-1}$.

### EXERCICE 2 Flotteur (⋆)

Un disque en liège de rayon $r$ flotte sur l'eau d'indice $n$. Il soutient une tige placée perpendiculairement en son centre.

1. Quelle est la longueur $h$ de la partie de la tige non visible pour un observateur dans l'air ? Citer les phénomènes mis en jeu.

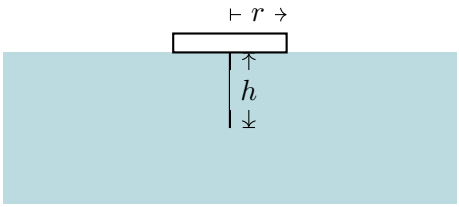



Fig 2. Flotteur.

### EXERCICE 3 Angle de Brewster (⋆)

1. Déterminer l'angle d'incidence $i_B$ appelé « angle de Brewster » pour lequel le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont à angle droit en fonction des indices $n_1$ et $n_2$.

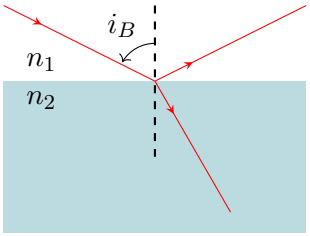



Fig 3. Angle de Brewster.

## L'essentiel

### EXERCICE 4 Le prisme (⋆⋆)

On considère le prisme de verre représenté sur la *Figure 4*. Une radiation monochromatique est envoyée avec une incidence $i$ sur l'une des faces du prisme. On note $\hat{A} \simeq 60,00°$ l'angle au sommet du prisme et $\hat{D}$ la déviation du faisceau.

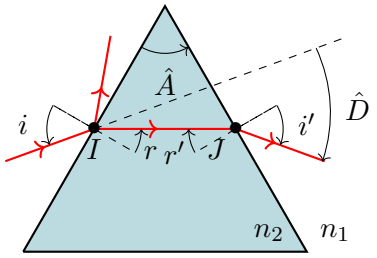



**Fig 4.** Prisme optique.

1. Montrer que la déviation $\hat{D}$ a pour expression :

$$\hat{D} = i + i' - \hat{A}$$

2. Calculer $\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}r'}$, $\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r}$ et $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$ en différentiant les équations de Snell-Descartes. En déduire que le minimum de déviation $D_m$ est atteint pour $r = r'$ et $i = i'$.
3. Démontrer que l'indice de réfraction $n_2$ du prisme pour la radiation déviée a pour expression :

$$n_2 = n_1 \frac{\sin\left(\frac{D_m + \hat{A}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}$$

4. L'angle de déviation minimal $D_m$ pour une radiation incidente rouge (de longueur d'onde $\lambda_r \simeq 625$ nm) est $D_{m_r} \simeq 57,892°$. En déduire $n_2$ sachant que $n_1 \simeq 1,000$ et préciser la déviation $D_{m_v}$ obtenue pour une radiation incidente verte de longueur d'onde $\lambda_v \simeq 547,0$ nm. On trouve expérimentalement $D_{m_v} \simeq 59,108°$. Expliquer la différence observée.

## EXERCICE 5 La fibre optique (⋆⋆)

Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur d'indice de réfraction $n_c \simeq 1,48$ cylindrique entouré d'une gaine d'indice de réfraction $n_g \simeq 1,46$. L'indice de réfraction de l'air est $n_{\text{air}} \simeq 1,00$.

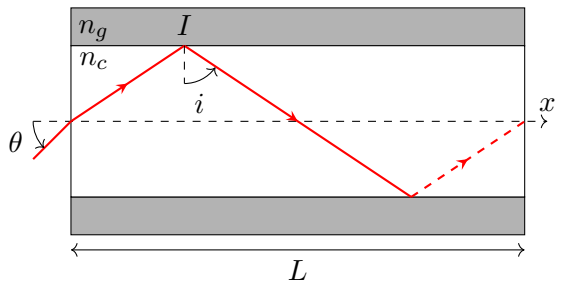



**Fig 5.** Fibre optique à saut d'indice.

1. Calculer la vitesse $v_\phi$ de la lumière dans le cœur.
2. Pour que la lumière puisse se propager correctement dans la fibre optique, il faut avoir réflexion totale en $I$. Pourquoi ?
3. À quelle condition sur l'angle $i$ a-t-on réflexion totale en $I$ ?
4. En déduire la condition sur l'angle d'incidence $\theta$.
5. On appelle ouverture numérique $\Omega$ de la fibre, le sinus de l'angle d'incidence maximal pour lequel les rayons qui pénètrent dans le cœur sont transmis jusqu'à la sortie. Calculer la valeur de $\Omega$.
6. Montrer que l'ouverture numérique peut aussi s'écrire :

$$\Omega = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

7. La fibre a une longueur totale $L \simeq 1,0$ km.
   - **a.** Considérons un rayon incident qui entre dans la fibre en incidence normale ($\theta \simeq 0°$). Calculer la durée du trajet de la lumière jusqu'à la sortie.
   - **b.** Même question avec l'angle d'incidence $i_{\text{max}}$.
   - **c.** Vérifier que la différence entre les deux durées précédentes peut s'écrire :

$$\Delta t = \frac{n_c(n_c - n_g)L}{n_g c}$$

   avec $c \simeq 300\,000$ km · s$^{-1}$ la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. Faire l'application numérique.
8. Application à la transmission d'information :
   - **a.** En entrée de la fibre, on place une diode laser qui émet des impulsions lumineuses. Ces impulsions correspondent au codage binaire d'une information numérique. Quelle durée $\tau$ doit séparer deux impulsions successives pour qu'elles ne se superposent pas à la sortie de la fibre ?
   - **b.** En déduire le débit maximal (en bits par seconde) de cette fibre optique.

## EXERCICE 6 Lentille plan-convexe (⋆)

La lentille plan-convexe représentée en *Figure 6* est formée d'un dioptre plan de sommet $O$ et d'un dioptre sphérique de sommet $S$ et d'indice de réfraction $n$.

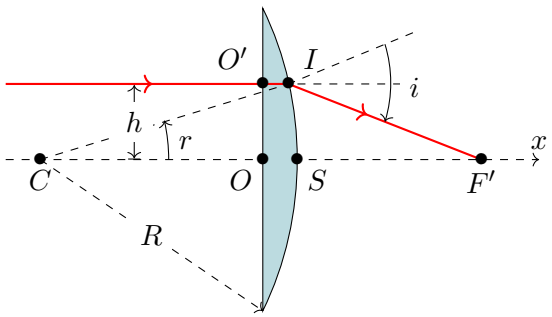



**Fig 6.** Schéma de la lentille plan-convexe.

1. Exprimer $\overline{CF'}$ en fonction de $\sin(i)$, $\sin(i - r)$ et $R$ (avec $R = CI$).
2. En déduire l'expression de $\overline{CF'}$ en fonction de $n$, $R$ et $h$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. Montrer que la distance focale $f' = \overline{SF'}$ de la lentille, dans les conditions de GAUSS, vérifie :

$$\frac{1}{f'} \simeq \frac{n-1}{R}$$

4. Pour un verre vérifiant la *loi de* CAUCHY $n = \frac{A}{\lambda^2} + B$, relier la variation de distance focale $\Delta f'$ à la variation de longueur d'onde $\Delta\lambda$ de l'onde incidente. Comment nomme-t-on ce phénomène ?

## Pour aller plus loin

### EXERCICE 7 La goutte d'eau (⋆⋆⋆)

On considère une goutte sphérique de centre $O$, d'indice moyen $n \simeq 1,33$, qui reçoit un rayon incident $EA$ en $A$ tel que $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AN}) = i$.

On considère successivement le rayon réfracté $AB$, réfléchi $BC$ et transmis $CS$. On pose $r = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ et on suppose dans un premier temps que $n =$ cte.

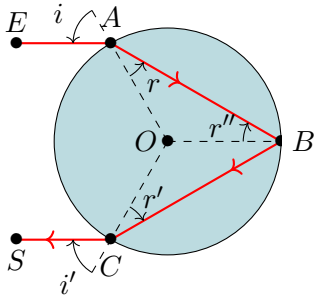



Fig 7. Réfractions et réflexions dans une goutte d'eau.

1. Exprimer $r''$ puis $r'$ en fonction de $r$.
2. Montrer que $D = \pi + 2i - 4r$ et exprimer les dérivées $\frac{dD}{di}$ et $\frac{dr}{di}$.
3. Pour une certaine valeur $i_m$ de $i$, la déviation $D$ passe par un minimum $D_m$. Montrer qu'alors, la valeur de $r$ correspondante vérifie la relation :

$$\cos(i_m) = \frac{n}{2}\cos(r_m)$$

Montrer que cette valeur $r_m$ est donnée par l'expression :

$$r_m = \arcsin\sqrt{\frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3}}$$

Calculer $i_m$, $r_m$ et $D_m$ au minimum de déviation.

4. La goutte est éclairée maintenant avec de la lumière blanche, sous incidence fixée au minimum de déviation ($i =$ cte $= i_m$) associé à l'indice $n$ de la question précédente. Pourquoi doit-on considérer que l'indice de la goutte d'eau s'étend entre $n$ et $n + \Delta n$ pour une telle lumière ? Quel phénomène se produit en $A$ ?

5. Exprimer $\frac{dD}{dn}$ et $\frac{dr}{dn}$. En déduire alors la variation $\Delta D_m$ pour une variation $\Delta n$ de l'indice, en fonction de $r_m$, $n$ et $\Delta n$. Calculer $\Delta D_m$ avec $\Delta n = 10^{-2}$.

### EXERCICE 8 Lois de Snell-Descartes (⋆⋆)

On considère le montage de la *Figure 8* constitué d'un dioptre séparant deux milieux d'indices optiques $n_1$ et $n_2$. Le *principe de* FERMAT précise que le trajet suivi par la lumière est celui qui minimise son temps de parcours.

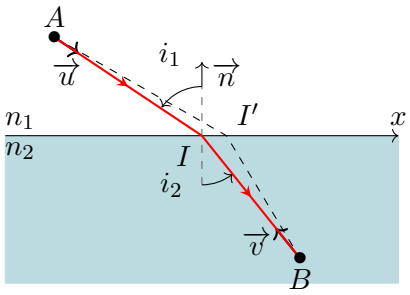



Fig 8. Réfraction sur un dioptre.

1. Montrer que le *principe de* FERMAT revient à minimiser la grandeur suivante :

$$L_{A\to B} = n_1\overrightarrow{AI}.\vec{u} - n_2\overrightarrow{IB}.\vec{v}$$

2. Montrer que $L_{A\to B}$ est minimale lorsque :

$$\overrightarrow{II'}.(n_1\vec{u} + n_2\vec{v}) = 0$$

3. En déduire l'énoncé des lois de la réfraction et de la réflexion.

### EXERCICE 9 Mirage optique (⋆⋆)

Dans un milieu non homogène, l'indice de réfraction $n$ du milieu peut dépendre du point $M(x, y, z)$. On doit donc écrire $n(M)$.

Dans le cas de l'air, l'indice de réfraction dépend de la température $T(M)$ selon la *loi de* GLADSTONE-DALE :

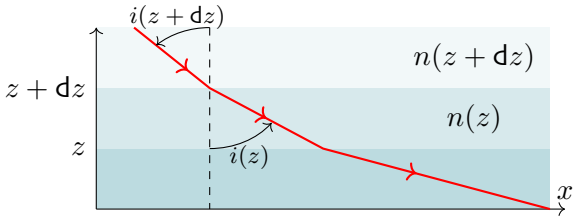
$$(n(M) - 1)T(M) \simeq 0,082 \text{ K}$$

On choisit de discrétiser le modèle d'atmosphère en quatre bandes d'air d'indice de réfraction variable $n_1$, $n_2$, $n_3$ et $n_4$ et correspondant à des altitudes croissantes.

1. L'air étant plus chaud au fur et à mesure qu'on se rapproche du sol, classer les indices optiques $n_1$, $n_2$, $n_3$ et $n_4$ par valeur croissante. En déduire une allure qualitative des rayons arrivant à l'œil de l'observateur par réfraction successive.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

On adopte désormais un modèle infinitésimal où l'indice de réfraction $n(z)$ ne dépend que de l'altitude $z$ par rapport au sol.




On cherche à établir l'équation de la trajectoire des rayons lumineux dans le milieu non homogène d'indice de réfraction vérifiant $n^2(z) = n_0^2 - kz$. On considère pour cela le rayon lumineux qui vérifie à l'arrivée dans l'œil $n_0 \sin(i_0) \mathrel{\hat{=}} A$.

2. Exprimer l'indice de réfraction $n(z+\mathrm{d}z)$ à l'altitude $z+\mathrm{d}z$ en fonction de $n(z)$, $\frac{\partial n}{\partial z}(z)$ et $\mathrm{d}z$.
3. De la même manière, exprimer $\sin(i(z))$, $\cos(i(z))$ et $\tan(i(z))$ en fonction de $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}z$.
4. Montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{n_0^2 - kz}{A^2} - 1}$$

5. Sachant qu'en $x = 0$ le rayon lumineux passe par un palmier à une altitude $z = L$, en déduire l'équation de la trajectoire des rayons lumineux $z(x)$. Expliquer le phénomène de mirage observé sur la *Figure 9*.



**Fig 9.** Mirage.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/