Électrocinétique

(Circuits à l'équilibre – ARQS)

Outils mathématiques : Différentielle $\mathrm{d}f$ d'une fonction f dans $\mathbb{R}^2$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de sorte que :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \Omega & \mapsto & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \to & f(x,y) \end{array}$$

soit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω (i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existent $\forall (x_0,y_0) \in \Omega$).

On dit alors que f est *différentiable* sur Ω de sorte que l'application linéaire $\mathrm{d}f$ (*différentielle* de f) vérifie :

$$\boxed{\mathrm{d}f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}y}$$

$\mathrm{d}f$ représente géométriquement l'accroissement linéaire de la fonction f lors d'un déplacement $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ autour du point (x_0,y_0). En particulier, $\mathrm{d}f = 0$ au niveau des extrema locaux de la fonction f.

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 LNTP et théorème de Millman (⋆)

On considère le circuit de la *Figure 1* où le noeud M est connecté à plusieurs autres noeuds par l'intermédiaire de résistances R_A, R_B et R_C et un générateur de courant (d'intensité η). On note respectivement V_A, V_B et V_C les potentiels des points A, B et C.

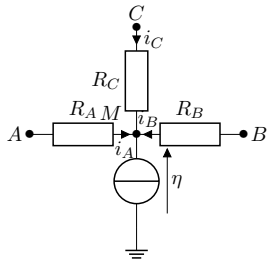


Figure 1 – Circuit électronique

1. Exprimer la loi des noeuds en M, en fonction de η, i_A, i_B et i_C.
2. Exprimer (via la loi d'Ohm) cette même relation en fonction de R_A, R_B, R_C, V_A, V_B, V_C et η.
3. En déduire le potentiel V_M au noeud M.

EXERCICE 2 Montage diviseur de tension (⋆)

Dans le circuit représenté en *Figure 2*.

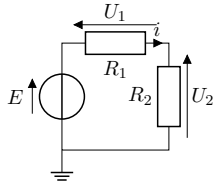


Figure 2 – Circuit électrique

1. Justifier que l'intensité i du courant soit unique dans le circuit.
2. Exprimer la tension U_1 en fonction de :
   - **a.** i et R_1. Énoncer la loi utilisée.
   - **b.** E et U_2. Énoncer la loi utilisée.
3. En déduire une expression de U_1 en fonction de R_1, R_2 et E.
4. Justifier le nom du montage.
5. Calculer la puissance électrique dissipée par effet Joule dans chacun des conducteurs ohmiques.
6. Représenter schématiquement la position du voltmètre dans le montage pour mesurer la tension U_1. Faire de même avec l'ampèremètre qui mesure l'intensité i du courant dans la branche.

EXERCICE 3 Vitesse des électrons (⋆)

Un courant électrique résulte d'un déplacement de charges électriques. Dans les métaux, ce sont les électrons qui remplissent ce rôle.

1. Définir l'intensité électrique i à partir de la charge élémentaire e, de la densité volumique $n^\star$ d'électrons et de leur débit volumique $v \times S$.
2. On définit la densité de courant $j = \frac{i}{S}$. Calculer j pour $i \simeq 100$ mA, $S = 1$ mm^2 et $n \simeq 2,0 \times 10^{29}$ m^{-3}. Identifier l'unité de j.
3. Estimer la vitesse v de déplacement des électrons dans le câble de cuivre.
4. Comment expliquer que la vitesse de propagation des signaux électrique dans un câble en cuivre soit de l'ordre de $c \simeq 2,0 \times 10^8$ m · s^{-1} ?

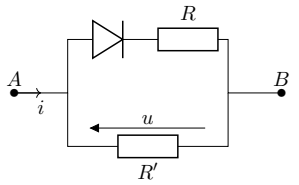
Données :

- Charge élémentaire : $e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ A · s.

L'essentiel

EXERCICE 4 Diode idéale et résistances (⋆)

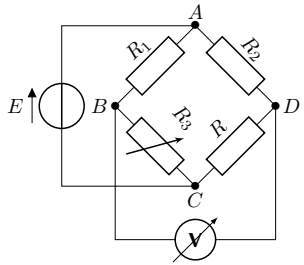
1. Représenter la caractéristique intensité-tension $i(u)$ du dipôle équivalent au groupement entre les points A et B.



EXERCICE 5 Pont de Wheatstone (⋆⋆)

On considère une jauge de déformation en cuivre collée sur une pièce mécanique vouée à se déformer sous l'effet d'actions mécaniques. Cette jauge de déformation est modélisée par une résistance R variable suivant la contrainte exercée sur la pièce mécanique.
On intègre ensuite la jauge de contrainte dans un montage appelé **pont de Wheatstone**, en hommage au britannique Charles Wheatstone qui l'a développé au XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Ce montage permet de déterminer la valeur de R en connaissant R_1, R_2 et R_3.

1. Représenter les tensions U_{BC}, U_{DC} et U_{AC}. Que vaut U_{AC} ?
2. En supposant que l'intensité du courant qui circule dans le voltmètre est quasi-nulle, identifier les valeurs de U_{BC} et U_{DC}.



3. En déduire la tension U_{DB} mesurée par le voltmètre.
4. On fait varier la résistance R_3 de manière à mesurer une tension nulle au voltmètre. On dit que le pont est **équilibré**. En déduire alors une relation entre la résistance recherchée R et les résistances R_1, R_2 et R_3 du pont de Wheatstone.
5. En déduire le lien qui existe entre la variation infinitésimale de tension $\mathrm{d}U_{BD}$ en sortie du pont et la variation infinitésimale de résistance $\mathrm{d}R$ de la jauge de déformation.

☞ La mesure de résistance de la jauge de contrainte permet de remonter à la valeur de l'action mécanique exercée sur une pièce.

EXERCICE 6 Boîtier de piles (⋆⋆)

On groupe n piles identiques (fém e, résistance interne r), de façon à avoir q piles par branche et p branches comme indiqué sur la *Figure 3*.

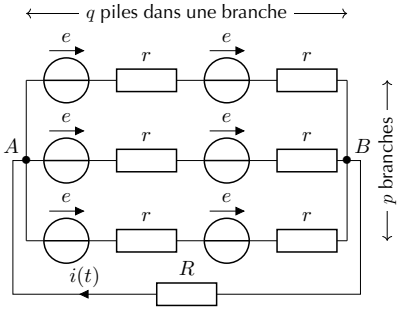


Figure 3 – Boîtier de piles

Cette association de générateurs alimente une résistance de charge R parcourue par un courant d'intensité i.

1. Quelle relation existe-t-il entre le nombre de branches p, le nombre de piles par branche q et le nombre total de piles n ?
2. Déterminer les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent à l'association des n piles vue des bornes A et B, en fonction de p, q, r et e : fém équivalente $E_{\text{éq}}$ et résistance équivalente $R_{\text{éq}}$.
3. **a.** En déduire la valeur de l'intensité du courant i traversant R en fonction de p, q, r, R et e, puis en fonction de p, n, r, R et e.
   b. On cherche le groupement optimal des piles qui, pour une résistance R donnée, correspond à une puissance calorifique maximale dissipée dans R, donc à un courant I maximal lui aussi.

   Donner les valeurs correspondantes de p et q en fonction de n, r et R, ainsi que la valeur maximale de l'intensité du courant I_{max} en

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

fonction de n, r, R et e.

Calculer p, q et I_{max} avec $n = 36$, $e = 2,0$ V, $r = 2,0\ \Omega$, $R = 4,5\ \Omega$.

c. Pour ce groupement optimal, comparer la résistance interne du générateur équivalent $R_{éq}$ à R. On parle alors d'adaptation de résistance.

4 a. Exprimer la puissance maximale $\mathcal{P}_{max}$ dissipée dans la résistance chauffante R en fonction de n, r et e.

b. Quel est le rendement en puissance η du dispositif utilisé, c'est-à-dire le rapport de la puissance dissipée $\mathcal{P}_{max}$ dans R sur la puissance fournie par les n piles ? Commenter.

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Théorème de Kennely (⋆⋆)

On considère les deux montages de la *Figure 4*. On cherche à les rendre équivalents, c'est-à-dire que si l'on déconnecte un nœud, la résistance entre les deux nœuds restants est identique dans les deux montages.

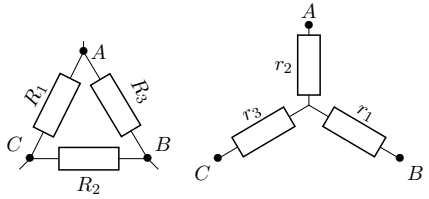


Figure 4 – Configuration triangle et étoiles

1. Si l'on déconnecte le nœud A quelle est la résistance équivalente entre le nœud B et le nœud C dans chaque montage ?
2. Renouveler le raisonnement dans le cas où l'on déconnecte le nœud B puis le nœud C.
3. Exprimer r_1, r_2 et r_3 en fonction de R_1, R_2 et R_3 pour que les deux circuits soient équivalents.

☞ Ces deux branchements prennent toute leur importance pour le branchement d'un moteur triphasé.

EXERCICE 8 Capteur CCD et photodiode (⋆⋆)

Une photodiode est un dispositif dont la caractéristique dépend de l'éclairement E.

La *Figure 5* représente le réseau de ses caractéristiques courant-tension pour différentes valeurs de l'éclairement E.

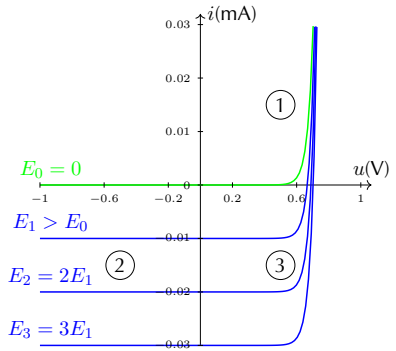
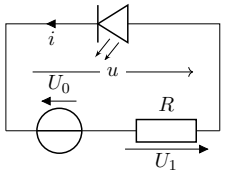


Figure 5 – Caractéristique de la photodiode

Le graphe est divisé en 3 cadrans selon les signes de u et i.

1. En l'absence d'éclairement, le courant ne passe dans la photodiode que lorsque u est supérieur à une tension seuil u_s. Quelle est la valeur de u_s ?
2. Dans quel(s) cadran(s) le composant se comporte-t-il comme un dipôle récepteur ou comme un dipôle générateur ?

La photodiode est insérée dans le montage de la figure ci-contre dans lequel le générateur, supposé parfait, délivre une tension continue et positive $U_0 = 1$ V.



3. Le luxmètre mesure l'éclairement $E = E_1 \simeq 1000$ lux indiqué sur le réseau de caractéristiques.

a. Déterminer la caractéristique $i = f(u)$ en convention générateur du dipôle $\mathcal{D}$ constitué par l'association en série du générateur idéal et de la résistance R, sachant que $R = 1$ kΩ.

b. Reproduire l'allure de la caractéristique de la photodiode et lui superposer celle du dipôle $\mathcal{D}$. En déduire dans quel cadran se trouve le point de fonctionnement de la photodiode pour l'éclairement considéré.

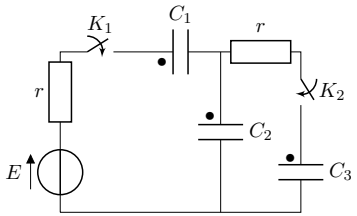
c. Montrer que la tension U_1 aux bornes de la résistance est proportionnelle à l'éclairement E, soit $U_1 = k \times E$. On donnera un ordre de grandeur de la constante k, .

EXERCICE 9 Circuit avec deux interrupteurs (⋆⋆)

Dans le circuit représenté, les valeurs des capacités sont données par les relations $C_1 = 2C$, $C_2 = C$ et

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$C_3 = C/3$. Les condensateurs sont initialement déchargés. On note q_1, q_2 et q_3 les charges portées par les armatures marquées par un point sur la figure.



On ferme K_1 tandis que K_2 reste ouvert.

1. Exprimer les charges Q_1, Q_2 et Q_3 emmagasinées respectivement par les condensateurs de capacité C_1, C_2 et C_3 lorsque le régime permanent est atteint.
2. Exprimer l'énergie totale $\mathcal{E}$ du système constitué par les trois condensateurs.

On ouvre K_1 puis on ferme l'interrupteur K_2.

3. Exprimer les charges Q'_1, Q'_2 et Q'_3 emmagasinées par les trois condensateurs lorsque le régime permanent est à nouveau atteint.
4. Exprimer la nouvelle énergie électrique totale $\mathcal{E}'$ du système constitué par les trois condensateurs.
5. Interpréter le signe de $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}' - \mathcal{E}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 1 LNTP et théorème de Millman (⋆)

1. En M, la loi des nœuds s'écrit $\boxed{i_A + i_B + i_c + \eta = 0}$.
2. La loi d'Ohm permet d'écrire :

$$\boxed{\frac{V_A - V_M}{R_A} + \frac{V_B - V_M}{R_B} + \frac{V_C - V_M}{R_C} + \eta = 0}$$

C'est la loi des noeuds en terme de potentiel.

3. La relation ci-dessus peut se réexprimer de la manière suivante :

$$\frac{V_A}{R_A} + \frac{V_B}{R_B} + \frac{V_C}{R_C} + \eta = \frac{V_M}{R_A} + \frac{V_M}{R_B} + \frac{V_M}{R_C}$$

soit :

$$\boxed{V_M = \frac{\frac{V_A}{R_A} + \frac{V_B}{R_B} + \frac{V_C}{R_C} + \eta}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}}}$$

Ce résultat est le **théorème de Millman**.

EXERCICE 2 Montage diviseur de tension (⋆)

1. Il n'y a pas de noeuds dans le circuit. L'intensité du courant est unique dans une branche. Comme il n'y a qu'une maille il ne peut y avoir qu'une seule intensité i dans le circuit.
2. **a.** $\boxed{U_1 = R_1 \times i}$. On a utilisé la loi d'Ohm.
   b. $\boxed{U_2 = R_2 \times i}$, soit $U_1 + U_2 = (R_1 + R_2)i = E$ (loi des mailles).
3. On déduit de la relation précédente que : $i = \frac{E}{R_1 + R_2} \Rightarrow \boxed{U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E}$.
4. La tension E a été divisée en fonction de R_1 et R_2 de manière à avoir $\boxed{\frac{U}{E} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$.
5. Dans chaque conducteur ohmique, la puissance dissipée par effet Joule est $R_1 i^2$ et $R_2 i^2$ soit $\boxed{(R_1 + R_2)i^2 = \frac{E^2}{R_1 + R_2}}$.
6. Le schéma est représenté sur la *Figure 6*.

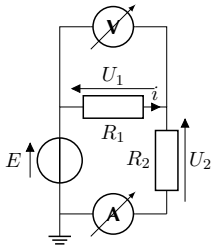


Figure 6 – Montage avec appareils de mesure

EXERCICE 3 Vitesse des électrons (⋆)

1. L'intensité du courant s'exprime comme suit :

$$\boxed{i = n^\star \times (-e) \times v \times S}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. La densité volumique de courant a pour expression :

$$\boxed{j \simeq \frac{0,1}{1 \times 10^{-6}} \simeq 1 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}}$$

3. La vitesse de déplacement des porteurs de charges est $v = \left|\frac{j}{ne}\right| \simeq \frac{1 \times 10^5}{2{,}0 \times 10^{29} \times 1{,}6 \times 10^{-19}} \simeq 3 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit environ $\boxed{11 \text{ cm}}$ par heure.
4. C'est l'**onde** et non les électrons qui se déplacent à $c \simeq 2{,}0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/