Traitement linéaire du signal

Le traitement du signal par filtres passifs (c'est-à-dire construits à partir de composants électroniques passifs tels que des conducteurs ohmiques, des condensateurs ou des bobines) a l'avantage de ne pas nécessiter d'alimentation électrique et se base sur des circuits simples à mettre en œuvre et peu onéreux. Néanmoins, cette simplicité cache des performances parfois restreintes qu'il convient de palier en ayant recours à des **filtres actifs**, c'est-à-dire alimentés en courant électrique. Parmi ces limites de performance, on peut citer :

- Une impédance d'entrée non infinie engendrant une perte du signal en amont du filtre. Plus le nombre de composants électroniques dans le filtre est élevé, plus la perte de signal est importante ce qui n'est pas sans poser problème lorsque :
  - le circuit en amont a une impédance élevée : perturbation du comportement du signal en amont inhérent à l'ajout du filtre.
  - le signal est de faible amplitude : dégradation du rapport signal sur bruit.
- Impédance de sortie non nulle : ce qui peut entraîner une charge supplémentaire pour le circuit électrique et causer des distorsions dans le signal.

Des composants électroniques, à l'instar de *l'amplificateur linéaire intégré*, permettent de réaliser un filtrage actif palliant les limites de performances listées précédemment.



Fig 1. Module analogique de filtrage actif de signaux sonores pour modules d'amplification.



Fig 2. ALI, composant actif incontournable dans un filtre actif.

Table des matières

1 Traitement linéaire du signal . . . 3
1 Le signal . . . 3
1.1 Signal dans l'A.R.Q.S. - Représentation complexe . . . 3
1.2 Représentations du signal . . . 3
1.3 Loi des nœuds en termes de potentiel et théorème de Millman . . . 5
2 L'amplificateur linéaire intégré - ALI . . . 5
2.1 Composition et intérêt du circuit . . . 5
2.2 Caractéristiques réelles d'un ALI . . . 5
2.3 Le modèle de l'ALI idéal . . . 7
2.4 Effet des rétroactions . . . 7
3 Les montages linéaires à base d'ALI . . . 9
3.1 Le montage sommateur inverseur . . . 9
3.2 Le montage soustracteur . . . 9
3.3 Le montage amplificateur inverseur . . . 9
3.4 Le montage amplificateur non inverseur . . . 9
3.5 Le montage intégrateur . . . 9
3.6 Le montage dérivateur . . . 9
4 Montages oscillateurs quasi-sinusoïdaux . . . 11
4.1 Principe du montage . . . 11
4.2 Condition de départ des oscillations et fréquence des oscillations . . . 11
4.3 Stabilité en fréquence de l'oscillateur . . . 13
5 Démonstrations . . . 13
2 Exercices d'application . . . 14

1 Le signal

1.1 Signal dans l'A.R.Q.S. - Représentation complexe

Tout signal électrique progressif **périodique** est décomposable en série de FOURIER d'**ondes progressives harmoniques** de pulsation fondamentale ω et de célérité c sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos\left(n\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi_n\right) \\ i(x,t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} i_n \cos\left(n\omega t - \frac{\omega}{c}x + \psi_n\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

$u(x,t)$ est la *tension électrique* et $i(x,t)$ l'*intensité* du courant électrique, φ_n et ψ_n étant des phases à l'origine des temps. Les représentations complexes de ces deux grandeurs, notées respectivement $\underline{u}(k,\omega)$ et $\underline{i}(k,\omega)$ (telles que $u(x,t) = \mathfrak{Re}\left(\underline{u}(k,\omega)\right)$ et $i(x,t) = \mathfrak{Re}\left(\underline{i}(k,\omega)\right)$) sont notées :

$$\underline{u}(k,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{u_n} e^{jn\omega t} e^{-j\frac{\omega}{c}x} \quad \text{et} \quad \underline{i}(k,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{i_n} e^{jn\omega t} e^{-j\frac{\omega}{c}x}$$

L'*approximation des régimes quasi-stationnaires* (A.R.Q.S.) consiste à négliger le phénomène de propagation de ces ondes compte tenu de la taille caractéristique ℓ du circuit. Dans de telles conditions, les signaux vérifient :

$$e^{-j\frac{\omega}{c}\ell} \sim 1 \Rightarrow \frac{\omega}{c}\ell \ll 2\pi$$

Cette inégalité peut être dédoublée en deux conditions équivalentes :

$$\underbrace{\ell \ll \lambda}_{\text{Condition sur la taille du circuit}} \qquad \underbrace{f \ll \frac{c}{\ell}}_{\text{Condition sur la fréquence du signal}} \qquad (2)$$

Négliger le phénomène de propagation de l'onde revient ainsi à considérer des signaux électriques de la forme :

$$\underline{u}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{u_n} e^{jn\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{i_n} e^{jn\omega t}$$

La linéarité des circuits électroniques étudiés par la suite autorise même à concentrer l'étude du traitement du signal sur l'un de ses harmoniques que l'on notera dans la suite du cours :

$$\boxed{\underline{u}(\omega) = \underline{u_0} e^{j\omega t}} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{i}(\omega) = \underline{i_0} e^{j\omega t}}$$

1.2 Représentations du signal

Un même signal u peut être représenté selon les trois représentations de la *Figure 3*.

Remarques :

- La valeur moyenne $\langle u \rangle$ du signal correspond à la valeur de la première composante spectrale u_0.
- La deuxième composante spectrale (première de pulsation non nulle) est appelée **fondamental** (F).
- Les composantes suivantes sont des **harmoniques** (H_2, H_3, etc).

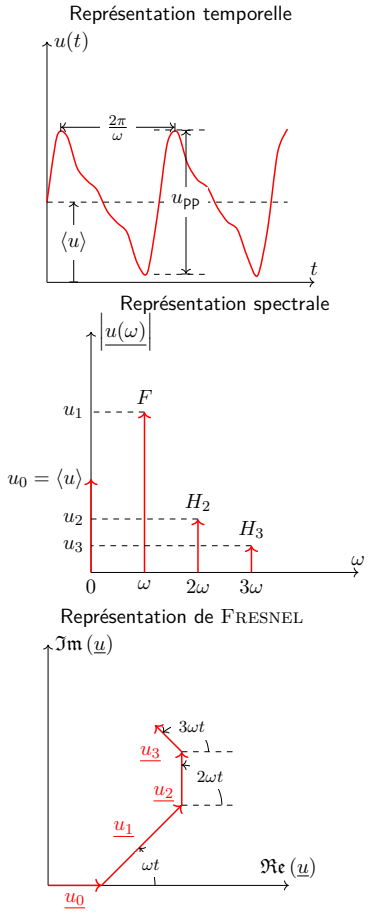


Fig 3. Représentation de signaux

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

1.3 Loi des nœuds en termes de potentiel et théorème de Millman

Les *lois de* KIRCHHOFF peuvent être formulées en faisant intervenir les impédances complexes des dipôles traversés par le courant alternatif. Cette formulation permet une résolution systématique des circuits linéaires en régime sinusoïdal permanent, en s'appuyant sur l'analyse fréquentielle.

La loi des nœuds appliquée au nœud M de la *Figure 4* s'écrit classiquement $i_A+i_B+i_C+i_D=0$. En exprimant chaque courant en fonction de la différence de potentiel et de l'impédance des dipôles correspondants, on obtient :

$$i_A+\frac{V_B-V_M}{jL\omega}+\frac{V_C-V_M}{\frac{1}{jC\omega}}+\frac{V_D-V_M}{R}=0$$

Cette formulation, appelée « loi des nœuds en termes de potentiel » (LNTP), permet de relier directement les potentiels aux nœuds du circuit.

La LNTP pour un nœud M connecté à N branches s'écrit de manière générale :

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{V_i-V_M}{\underline{Z_i}}=0 \qquad (3)$$

En isolant le potentiel V_M, on obtient :

$$V_M=\frac{i_A+\frac{V_B}{jL\omega}+\frac{V_C}{\frac{1}{jC\omega}}+\frac{V_D}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}+jC\omega}$$

Cette expression peut être interprétée comme une moyenne pondérée des potentiels appliqués, pondérée par les admittances des branches. Elle permet d'accéder directement à la tension au nœud M sans avoir à résoudre l'ensemble du système.

Le théorème de MILLMAN pour un nœud M connecté à N branches s'écrit :

$$V_M=\sum_{i=1}^{N}\frac{V_i}{\underline{Z_i}}\Big/\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\underline{Z_i}} \qquad (4)$$

Ce théorème, très utile dans les circuits à plusieurs sources ou branches parallèles, simplifie considérablement l'analyse nodale en régime complexe.

⚠ Ces deux énoncés n'étant pas explicitement au programme de MP, il convient de savoir les redémontrer en cas d'usage.

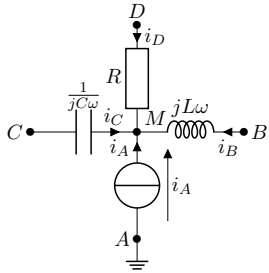


Fig 4. Illustration de la LNTP.

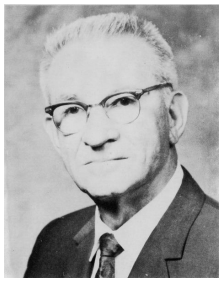


Fig 5. JACOB MILLMAN (1911-1991). Électronicien russe émigré aux États-Unis, il obtient un doctorat au MIT puis enseigne et écrit plusieurs ouvrages influents sur l'électronique. MILLMAN travaille sur des systèmes radars pendant la Seconde Guerre Mondiale.

2 L'amplificateur linéaire intégré - ALI

2.1 Composition et intérêt du circuit

Un amplificateur linéaire intégré (ALI), plus couramment appelé amplificateur opérationnel (ou AOP, pour amplificateur opérationnel), est un composant électronique actif fondamental dans l'architecture des systèmes analogiques. Il est conçu à partir d'un réseau complexe de transistors bipolaires ou MOS, de résistances intégrées de précision et, dans certains cas, d'un condensateur interne jouant un rôle dans la compensation en fréquence pour assurer la stabilité dynamique du système amplifié.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Ce circuit intégré est le fruit de décennies d'optimisation dans le domaine de la microélectronique analogique, visant à réaliser un composant à gain extrêmement élevé en boucle ouverte (typiquement $G_0 \sim 10^5$ à 10^6), mais exploité principalement en régime de contre-réaction négative. Cela permet de linéariser sa réponse, de contrôler finement son gain effectif, et de stabiliser le comportement fréquentiel de l'ensemble.

L'ALI se comporte idéalement comme un dipôle différentiel : il amplifie la différence de potentiel entre ses deux entrées, non-inverseuse E^+ et inverseuse E^-, tout en maintenant certaines propriétés essentielles à son intégration dans des systèmes complexes :

- Une très grande impédance d'entrée ($Z_e \sim 10^{12}\ \Omega$), qui garantit une charge négligeable de l'étage précédent et permet de considérer les entrées comme pratiquement isolées en courant ;
- Une faible impédance de sortie ($Z_s \sim 50$ à $200\ \Omega$), facilitant l'adaptation d'impédance avec la charge connectée en sortie ;
- Une plage de tension de sortie limitée par les tensions d'alimentation, typiquement $+V_{cc} \simeq +15$ V et $-V_{cc} \simeq -15$ V dans les montages analogiques classiques. Ces alimentations symétriques, bien qu'indispensables au fonctionnement, ne sont généralement pas représentées dans les schémas, pour des raisons de clarté.

En pratique, le comportement réel de l'ALI s'écarte des modèles idéaux, en raison des limitations en bande passante, des courants de polarisation d'entrée, et des décalages en tension (offset). Néanmoins, son modèle linéaire idéal constitue une approximation puissante dans l'analyse des circuits analogiques linéaires, permettant la synthèse de fonctions aussi variées que l'intégration, la dérivation, la sommation, le filtrage actif, ou encore la conversion analogique-numérique.

2.2 Caractéristiques réelles d'un ALI

Le principe de fonctionnement d'un ALI est représenté en *Figure 7*.

- En fonctionnement statique (*Figure 9*), l'ALI amplifie la *tension différentielle* $\varepsilon = v_+ - v_-$:

  Deux modes de fonctionnement :

  — En régime linéaire (RL) :

  $$v_s = \mu_0 \varepsilon$$

  — En régime saturé (RS) :

  $$v_s = \pm V_{\text{sat}}$$

  NB : V_{sat} est légèrement inférieur à V_{cc}.
- En fonctionnement dynamique, la présence d'un condensateur dans l'ALI lui confère le comportement d'un filtre passe-bas dont le diagramme de Bode en gain est représenté en *Figure 9*. La fonction de transfert de l'ALI en régime linéaire est ainsi :

$$\underline{\mu}(\omega) = \frac{\underline{v_s}(\omega)}{\underline{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{f}{f_c}}$$

ω_c est ainsi la pulsation de coupure de l'ALI en boucle ouverte.

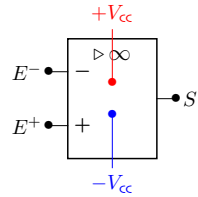


Fig 6. Schéma électrique d'un ALI.

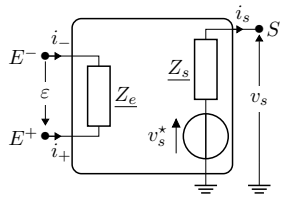


Fig 7. Modélisation statique de l'ALI.

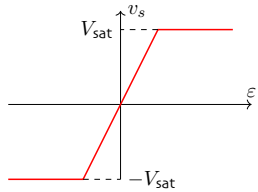


Fig 8. Caractéristique statique de l'ALI.

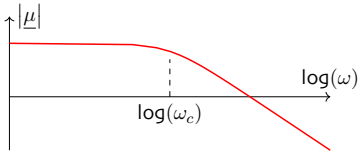


Fig 9. Comportement dynamique de l'ALI.

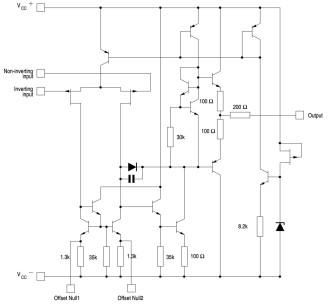


Fig 10. Circuit électronique du TL081.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2.3 Le modèle de l'ALI idéal

Les hypothèses de l'ALI idéal sont répertoriées dans le tableau de la *Figure 11*.

Critère	ALI réel (TL081)	ALI idéal
$\lvert\underline{Z_e}\rvert$	$10^{12}\ \Omega$	$+\infty$
i_+/i_-	~ 30 pA	0
$\lvert\underline{Z_s}\rvert$	50 à $500\ \Omega$	0
μ_0	2×10^5	$+\infty$
ε (RL)	$150\ \mu$V	0
f_c	20 Hz	0 Hz
$f_c\mu_0$	4 MHz	

Fig 11. Hypothèses de l'ALI idéal

Ces hypothèses visent à simplifier le comportement de composant électronique.
⚠ La colonne de droite est à connaître par cœur.

2.4 Effet des rétroactions

En adoptant une structure de schéma-bloc, le principe du bouclage est représenté sur la *Figure 12*.

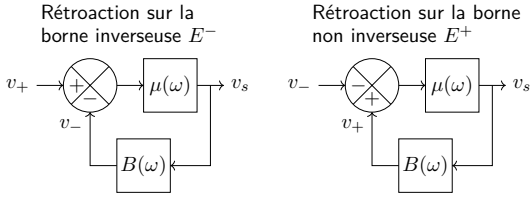


Fig 12. Rétroactions d'un ALI.

On parle de *rétroaction négative* lorsque la boucle de rétroaction conduit à relier la sortie S sur l'entrée inverseuse E^- et de *rétroaction positive* lorsque la boucle de rétroaction conduit à relier la sortie S sur l'entrée non inverseuse E^+.

2.4.1 Effet stabilisant de la rétroaction négative :

En boucle **fermée**, la fonction de transfert de l'ALI est :

$$\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_+}} = \frac{\mu(\omega)}{1+\mu(\omega)B(\omega)} \quad \underset{B(\omega)\triangleq B}{\longrightarrow} \quad \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_+}} = \frac{\frac{\mu_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}}{1+\frac{B\mu_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}} = \frac{\frac{\mu_0}{1+B\mu_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c(1+B\mu_0)}}$$

La fonction de transfert est inconditionnellement stable puisque le pôle de la fonction de transfert $j\omega = -\omega_c(1+B\mu_0)$ est à partir réelle négative.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

NB : Le comportement d'un ALI dans un montage bouclé est celui d'un filtre passe-bas dont la pulsation de coupure $\omega_c(1+B\mu_0)$ et le gain statique $\frac{\mu_0}{1+B\mu_0}$ sont reliés par le *facteur de mérite* K_m :

$$\boxed{K_m \hat{=} \omega_c(1+B\mu_0) \times \frac{\mu_0}{1+B\mu_0} = \omega_c\mu_0 = \text{cte}}$$

Ce facteur est indépendant de la charge B du circuit électrique connecté à l'ALI.

Conséquences de la rétroaction négative sur un ALI :

- Le gain $\frac{\mu_0}{1+B\mu_0}$ ne dépend plus que de B pour un gain $\mu_0 B$ très grand devant 1.
- La bande passante du montage $[0;\omega_c(1+B\mu_0)]$ est élargie d'autant plus que μ_0 est élevé.
- L'ALI fonctionne en *régime linéaire* (a priori) puisque les pôles de la FTBF sont à partie réelle négative.

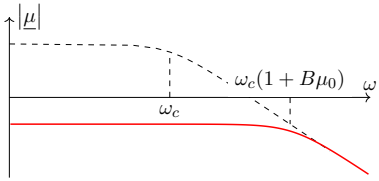


Fig 13. Augmentation de la bande-passante liée à la rétroaction négative.

2.4.2 Effet déstabilisant de la rétroaction positive

Le calcul de la fonction de transfert de l'ALI en boucle fermée est :

$$\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_-}} = -\frac{\mu(\omega)}{1-\mu(\omega)B(\omega)} = \frac{\frac{\mu_0}{\mu_0 B-1}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c(1-\mu_0 B)}}$$

Cette fonction de transfert est instable puisque le pôle $j\omega = \omega_c(\mu_0 B - 1)$ est à partie réelle positive (avec $\mu_0 B \gg 1$).

Conséquences de la rétroaction positive sur un ALI :

Un ALI subissant une rétroaction positive fonctionne en *régime saturé*.

2.4.3 Résumé sur le bouclage d'un ALI

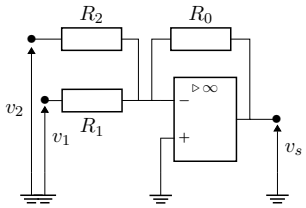
Type de bouclage	Aucun	Positif	Négatif	Les deux
Régime	Saturé	Saturé	Linéaire	Compétition
Effet	Aucun		• Élargit la bande passante • Gain indépendant de l'ALI • Fonctionnement linéaire	• Création d'un oscillateur

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3 Les montages linéaires à base d'ALI

3.1 Le montage sommateur inverseur

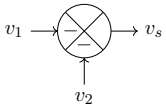
Montage



Fonction de transfert

$$\boxed{v_s = -R_0 \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right)}$$

Schéma bloc si $R_1 = R_2 = R_0$:



Caractéristiques

- Permet de former un convertisseur numérique analogique.
- Impédance d'entrée :

$$\underline{Z_e} = R_n \neq +\infty$$

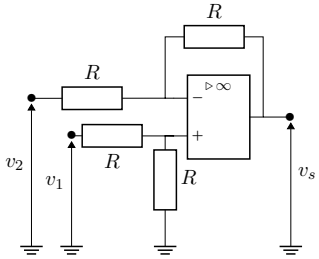
pour chaque entrée n.

⚠ Peut perturber le fonctionnement du circuit amont.

Fonction de transfert :

3.2 Le montage soustracteur

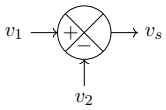
Montage



Fonction de transfert

$$\boxed{v_s = v_1 - v_2}$$

Schéma bloc :



Caractéristiques

- Permet de comparer deux signaux.
- Impédance d'entrée :

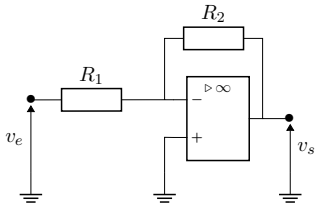
$$\underline{Z_e} = R \neq +\infty$$

⚠ Peut perturber le fonctionnement du circuit amont.

Fonction de transfert :

3.3 Le montage amplificateur inverseur

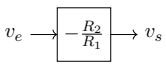
Montage



Fonction de transfert

$$\boxed{v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_e}$$

Schéma bloc :



Caractéristiques

- Permet d'amplifier ou d'atténuer un signal.
- Impédance d'entrée :

$$\underline{Z_e} = R_1 \neq +\infty$$

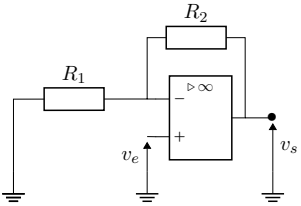
⚠ Peut perturber le fonctionnement du circuit amont.

Fonction de transfert :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3.4 Le montage amplificateur non inverseur

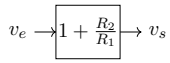
Montage



Fonction de transfert

$$v_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_e$$

Schéma bloc :



Caractéristiques

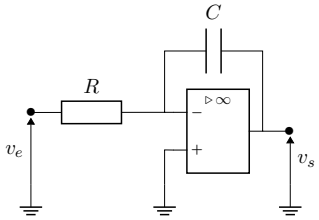
- Permet d'amplifier un signal.
- Impédance d'entrée :

$$\underline{Z_e} = \infty$$

Fonction de transfert :

3.5 Le montage intégrateur

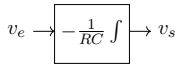
Montage



Fonction de transfert

$$v_s = -\frac{1}{RC} \int v_e \mathrm{d}t$$

Schéma bloc :



Caractéristiques

- Circuit impossible en pratique (diverge à basses fréquences)
- Impédance d'entrée :

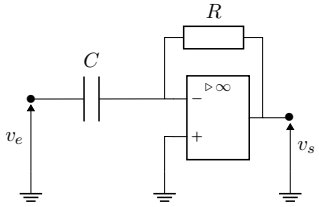
$$\underline{Z_e} = R \neq +\infty$$

⚠ Peut perturber le fonctionnement du circuit amont.

Fonction de transfert :

3.6 Le montage dérivateur

Montage



Fonction de transfert

$$v_s = -RC \frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}$$

Caractéristiques

- Permet d'étudier les variations d'une grandeur
- Impédance d'entrée :

$$\underline{Z_e} = \frac{1}{jC\omega} \neq +\infty$$

⚠ Peut perturber le fonctionnement du circuit amont.

Fonction de transfert :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

4 Montages oscillateurs quasi-sinusoïdaux

Dans de nombreux systèmes de communication, la gestion d'un signal sinusoïdal, appelé « porteuse », est centrale. Il est nécessaire de créer ce signal de manière analogique et de contrôler précisément la fréquence d'oscillations. Les montages d'oscillateurs quasi sinusoïdaux permettent de réaliser cette fonction.

4.1 Principe du montage

Un oscillateur quasi-sinusoïdal est composé de deux parties résumées dans le schéma bloc de la *Figure 14* :

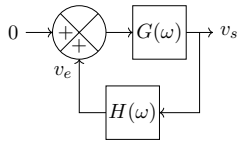


Fig 14. Principe de fonctionnement général d'un oscillateur

- La **chaîne d'amplification**, de fonction de transfert $G(\omega)$ a pour but d'amplifier le signal et de compenser les pertes dans le circuit.
- La **chaîne de réaction**, de fonction de transfert $H(\omega)$, généralement constituée d'un filtre passe-bande, permet de sélectionner une fréquence et de rejeter les autres harmoniques du signal oscillant pour conserver une excitation quasi-harmonique.

On considérera les expressions suivantes dans la suite de cette section :

$$G(\omega) \hat{=} G \quad \text{et} \quad H(\omega) \hat{=} \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

NB : Il est important, à ce stade, de supposer le signal d'entrée v_e harmonique (pour considérer que les fonctions de transfert $G(\omega)$ et $H(\omega)$ aient un sens) et de vérifier à quelle condition les oscillations débutent

4.2 Condition de départ des oscillations et fréquence des oscillations

Condition de départ des oscillations (condition de Barkhausen) :

Les oscillations sont entretenues lorsque le gain G est suffisant pour compenser les pertes dans la chaîne de réaction. Le gain critique G_0 pour lequel débutent les oscillations vérifie :

$$G_0 H_0 = 1 \tag{5}$$

Dans la pratique, le signal commence à osciller sous l'effet du micro fluctuations de $u(t)$ en lien avec le bruit thermique.

La nature du départ oscillant dépend du facteur d'amortissement $\lambda \leq 0$ de l'oscillateur. On peut distinguer quatre situations possibles en fonction de la valeur de du gain G.

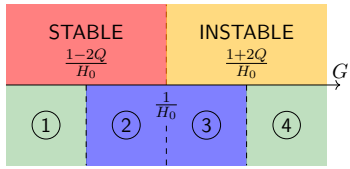


Fig 15. Régime d'évolution en fonction du grain G.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Le tableau de la *Figure 16* représente les quatre situations possibles de départ ou d'amortissement d'oscillations en fonction de la valeur du gain G.

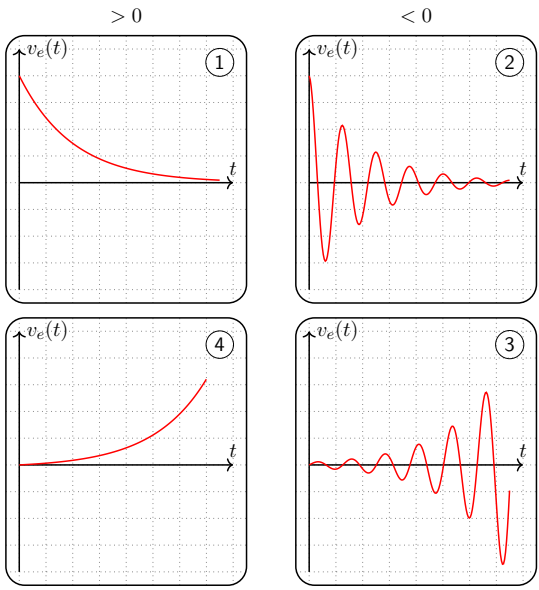


Fig 16. Représentation du départ oscillant ou de l'atténuation du signal dans un oscillateur en fonction de la valeur du gain G.

L'entretien des oscillations est rendu possible par deux facteurs :

- Le gain d'amplification suffisant ($G > \frac{1}{H_0}$, situation (3) ou (4)) pour compenser les pertes dans le reste du circuit.
- Les non linéarités de la chaîne d'amplification comme une **saturation** d'un l'ALI amplificateur. Cette saturation empêche au signal de diverger.

Pulsation des oscillations :

Si le filtre utilisé dans la chaîne de réaction est un filtre passe-bande du deuxième ordre de pulsation propre ω_0, on peut montrer que la pulsation ω_{osc} des oscillations vérifie :

$$\boxed{\omega_{osc} = \omega_0}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

4.3 Stabilité en fréquence de l'oscillateur

L'intérêt d'utiliser un filtre sélectif ($Q \gg 1$) est d'obtenir un oscillateur stable en fréquence. La conséquence d'un léger déphasage introduit dans la chaîne d'amplification est ainsi estompé par le filtre sélectif.

Stabilité en fréquence d'un oscillateur :

On définit la *stabilité* S d'un oscillateur par :

$$S \triangleq \frac{\mathrm{d}\arg\left(\underline{G}\right)}{\mathrm{d}x}(1) \tag{6}$$

avec x la pulsation réduite des oscillations.

Pour un filtre passe-bande de facteur de qualité Q, la variation de pulsation relative ε introduite par un gain complexe de la forme $G(1+j\epsilon)$ dans la chaîne d'amplification est :

$$\varepsilon = \frac{\epsilon}{2Q} \quad \text{soit} \quad S = 2Q \tag{7}$$

Quelques exemples de facteurs de qualité sont répertoriés en *Figure 17* pour plusieurs résonateurs.

Résonateur	**Facteur de qualité** Q
Circuit RLC sélectif	$\sim 10^2$
Diapason	$\sim 10^3$
Oscillateur à quartz	$\sim 10^4$ à 10^5
Atome excité	$\sim 10^7$

Fig 17. Facteurs de qualité de certains systèmes usuels.

Plus le facteur de qualité Q est élevé, plus la fréquence propre de l'oscillateur est stable et précise. C'est ce principe qui est exploité dans les montres à quartz, où l'oscillation mécanique d'un cristal fournit une base de temps fiable. À un niveau de précision supérieur, les horloges atomiques utilisent la fréquence de transition entre deux niveaux d'énergie d'un atome de césium excité. La seconde est aujourd'hui définie par un nombre entier d'oscillations entre ces deux niveaux d'énergie.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

5 Démonstrations

Démonstration : Condition de Barkhausen

Les deux fonctions de transfert de la chaîne d'amplification et de réaction sont :

$$\underline{v_s} = G\underline{v_e} \quad \text{et} \quad \underline{v_e} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{v_s}$$

Les signaux $\underline{v_e}$ et $\underline{v_s}$ vérifient ainsi la relation suivante :

$$\underline{v_e}\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = H_0 G \underline{v_e}$$

L'équation différentielle vérifiée par $v_e(t)$ est donc :

$$\left(1 + \underbrace{(1 - H_0G)\frac{1}{Q}}_{2\lambda}\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}\right)\underline{v_e} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}^2 v_e}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\lambda\omega_0\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 v_e(t) = 0$$

L'amortissement $\lambda = \frac{1-H_0G}{2Q}$ du signal v_e devient négatif (amplification du signal) lorsque $G = G_0$ tel que :

$$1 - H_0G_0 = 1 \Rightarrow \boxed{H_0G_0 = 1}$$

Démonstration : Fréquence d'un oscillateur

La fonction de transfert du système bouclé s'écrit :

$$\underline{v_e} = \frac{GH_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{v_e}$$

soit :

$$\arg(\underline{v_e}) = \arg\left(\frac{GH_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) + \arg(\underline{v_e})$$

d'où :

$$\arg\left(\frac{GH_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = 0 \Rightarrow \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0}$$

Démonstration : Stabilité d'un oscillateur

On considère désormais les relations entrée-sortie suivante :

$$\underline{v_s} = G(1 + j\epsilon)\underline{v_e} \quad \text{et} \quad \underline{v_e} = \frac{H_0}{1 + jQ\left((1+\varepsilon) - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)}\underline{v_s}$$

La variation de phase $\Delta\varphi = \arctan(\varepsilon)$ est donc liée au déphasage introduit par la partie complexe ϵ du gain :

$$\arg(1 + j\epsilon) = \arg\left(1 + jQ\left((1+\varepsilon) - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)\right)$$

Pour $\varepsilon \ll 1$, on a donc :

$$\arctan(\epsilon) = \arctan(2Q\varepsilon) \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{\epsilon}{2Q}}$$

NB : Le déphasage introduit dans le signal est donc d'autant plus faible que le facteur de qualité du filtre est élevé

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Exercices d'application

EXERCICE 1 Comparateur simple (⋆)

On considère le montage, représenté en *Figure 1*, appelé « comparateur simple ». La tension d'alimentation est $v_- = V\cos(\omega t)$ et l'ALI est considéré comme parfait.

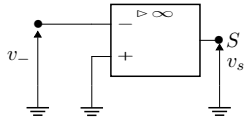


Fig 1. Comparateur simple

1. Quel est le régime de fonctionnement de l'ALI parfait ?
2. Tracer le graphe de $v_-(t)$ et de $v_s(t)$.
3. Quel type d'inconvénient peut poser ce circuit lorsque le signal $v_-(t)$ est bruité ?

EXERCICE 2 Montage suiveur (⋆)

On considère les deux circuits représentés en *Figure 2*. l'ALI est supposé idéal.

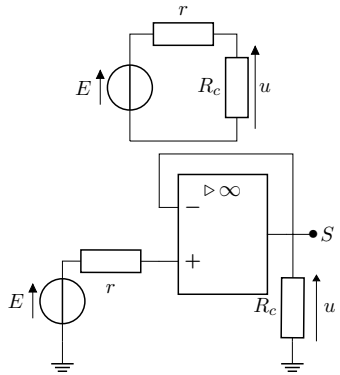


Fig 2. Intérêt du montage suiveur

1. Préciser le mode de fonctionnement de l'ALI.
2. Préciser l'expression de la tension $u(t)$ dans les deux situations représentées.
3. Conclure sur l'intérêt du montage suiveur.

EXERCICE 3 Comparateur à hystérésis (⋆)

On considère le montage de la *Figure 3* appelé « comparateur à hystérésis ».

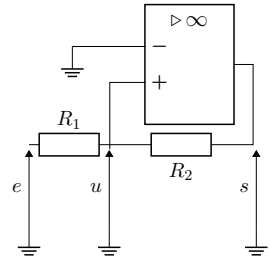


Fig 3. Comparateur à hystérésis

1. Préciser le régime de fonctionnement de l'ALI.
2. Exprimer u en fonction de e et s.
3. Exprimer la condition de basculement de la tension s. On note $\beta = \frac{R_1}{R_2}$.
4. Tracer $s = f(e)$ en orientant le graphe.
5. Représenter l'allure de $s(t)$ et $e(t)$ pour $e(t) = E\cos(\omega t)$.
6. Quel avantage présente ce circuit dans le traitement des signaux bruités (comparativement au comparateur simple).

EXERCICE 4 Oscillateur à résistance négative (⋆⋆)

Le montage d'oscillateur à résistance négative est représenté en *Figure 4*.

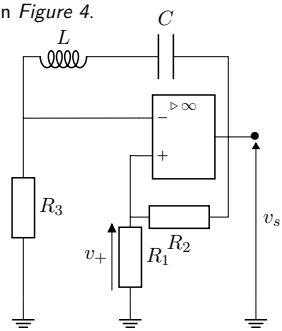


Fig 4. Oscillateur à résistance négative

1. Déterminer le régime de fonctionnement de l'ALI.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $v_s(t)$. À quelle condition cette équation différentielle est instable ?
3. Représenter l'allure du départ des oscillations en fonction de la valeur de R_2/R_1.
4. Déterminer la fréquence des oscillations de l'oscillateur.