7 - Diffusion thermique dans l'ARQS

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Équation de la chaleur (⋆)

On considère des matériaux homogènes sans apport ou absorption d'énergie thermique locale.

1. Retrouver l'équation de la diffusion thermique dans les cas unidimensionnels suivants.
   - **a.** Tuyau métallique infini de section constante S, thermiquement isolé, unidimensionnel (diamètre négligeable devant la longueur). x est la distance à un point O sur l'axe du tuyau.
   - **b.** Diffusion dans un gaz parfait, comme l'air, autour du point O. On notera r la distance au point O.

On place en O un petit conducteur ohmique, de taille négligeable devant l'échelle d'étude, qui dissipe une puissance thermique $\mathcal{P}$. On attend que le régime stationnaire soit établi, le problème reste unidimensionnel dans chaque cas.

2. En considérant les deux cas possibles vus à la *question* 1, calculer T en tout point de l'espace. On note $T_0 = T(d)$.

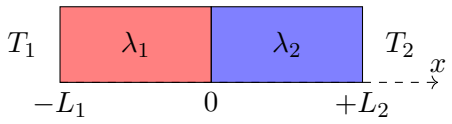
EXERCICE 2 Récipient sphérique (⋆⋆)

On considère deux sphères concentriques de rayons a et $b > a$ et remplies d'un matériau de conductivité thermique λ, de masse volumique μ et de chaleur massique c. On note les températures constantes à la surface des sphères $T_1 = T(a)$ et $T_2 = T(b) < T_1$.

1. Établir l'équation de diffusion thermique.
2. On se place en régime stationnaire.
   - **a.** Calculer le champ de température $T(r)$ en un point du matériau.
   - **b.** Calculer la puissance thermique $\mathcal{P}$ transférée entre les deux parois sphériques.
   - **c.** Calculer la résistance thermique R_{th} du matériau. Par analogie, déterminer la résistance électrique dans la même géométrie.
3. Montrer qu'en régime stationnaire la puissance thermique radiale est constante, puis en intégrant entre les deux rayons, retrouver la résistance thermique.
4. Retrouver le résultat précédent par association de résistances élémentaires.

EXERCICE 3 L'effusivité (⋆)

Deux cylindres, isolés thermiquement sur leurs faces latérales, même section S, de même axe (Ox), de conductivité thermique λ_1 et λ_2, de longueur L_1 et L_2, sont en contact en $x = 0$. On maintient leurs extrémités en $x = -L_1$ et $x = L_2$ aux températures respectives T_1 et T_2. On se place en régime stationnaire.



1. Rappeler l'équation de diffusion de la chaleur, sans terme source en régime stationnaire.
2. La résoudre dans les milieux 1 et 2. On notera T_i la température de l'interface en $x = 0$.
3. À partir des équations locales de conservation de l'énergie, montrer que le flux du vecteur densité de courant thermique se conserve.
4. En déduire la température T_i à l'interface $x = 0$.
5. Calculer T_i pour un contact main-bois et un contact main-acier pour $L_1 = L_2$. Expliquer pourquoi la sensation de froid se fait plus ressentir en posant la main sur l'acier que sur le bois.

Données :

températures : $T_1 \simeq 37°\text{C}$ (main) et $T_2 \simeq 20°\text{C}$ (bois ou acier)
conductivités thermiques : $\lambda_1 \simeq 10\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (main) et $\lambda_2 \simeq 1\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (bois) et $\lambda_2' \simeq 100\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (acier).

L'essentiel

EXERCICE 4 L'igloo (⋆)

Un humain dégage $\mathcal{P} \simeq 50$ W par son métabolisme au repos. Au-delà, sa vie est en danger. Bien couvert, il survit à $T_{\text{int}} \simeq 10°\text{C}$, mais dehors, il fait $T_{\text{ext}} \simeq -10°\text{C}$.

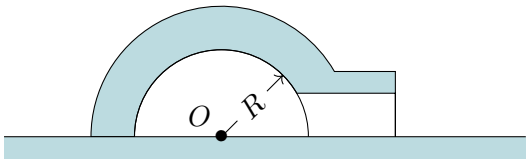


Fig 1. Schématisation d'un igloo.

La conductivité thermique de la glace est $\lambda \simeq 0,050\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. On considère un igloo de diamètre intérieur $2R \simeq 2,0$ m, d'épaisseur e, en négligeant la conduction avec le sol.

1. Établir l'équation de diffusion thermique en coordonnées sphériques. En déduire que la température dans la glace est de la forme :

$$T(r) = -\frac{a}{r} + b$$

où a et b sont deux constantes réelles.

2. On néglige tout phénomène de convection aux parois. Déterminer les expressions de a et b en fonction de T_{int}, T_{ext}, R et e.
3. Déterminer l'expression du flux thermique Φ en fonction de T_{int}, T_{ext}, R, e et λ.
4. Calculer l'épaisseur minimale de l'igloo pour y survivre.

Données : En sphérique le laplacien s'écrit :
$\Delta A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial A}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2}$

EXERCICE 5 Double vitrage (⋆)

On se place en régime permanent et on étudie une surface vitrée (de surface S) entre une zone intérieure de température $T_i \simeq 22°\text{C}$ et une zone extérieure de température $T_e \simeq -5°\text{C}$, orthogonale à l'axe Ox, et dont le verre a une conductivité thermique λ.

On considère d'abord un simple vitrage d'épaisseur $2e$.

1. Calculer la résistance thermique R_1 de la vitre, puis le flux de chaleur Φ_1 sortant de la pièce.

On considère désormais un double vitrage constitué de deux vitres de même épaisseur e séparées par une épaisseur e d'air, de conductivité thermique λ'.

2. Calculer la résistance thermique R_2 du double vitrage, puis le flux de chaleur Φ_2 sortant de la pièce et enfin le rapport $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$. Ce résultat est-t-il réaliste ? Calculer les températures T_1 et T_2 des faces au regard des deux vitres. Représenter la courbe donnant la loi $T(x)$ dans le double vitrage.

En plus de la conduction étudiée précédemment, on tient compte des échanges surfaciques de chaleur par convection entre un solide à la température T_s et un fluide à la température T_i, avec lequel il est en contact suivant la surface S. Le flux thermique correspondant est donné par la loi de Newton :

$$\Phi = hS(T_2 - T_1)$$

avec $h = h_e \simeq 12\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, pour le contact verre-air extérieur et $h = h_i \simeq 8\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pour les autres contacts air-verre. On ne tient désormais plus compte de la conduction dans la couche d'argon du fait de la création de cellules de convection dans le gaz.

3. Définir la résistance thermique correspondant au phénomène de convection.
   - **a.** Calculer la nouvelle valeur du flux thermique Φ_1 dans le cas du simple vitrage.
   - **b.** Calculer la nouvelle valeur du flux thermique Φ_2 dans le cas du double vitrage.
   - **c.** Calculer le rapport $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ et conclure.

Le tableau de la *Figure 2* répertorie les coefficients d'isolation $U_g = \frac{1}{SR_{\text{th}}}$ par unité d'écart en température entre l'intérieur et l'extérieur.

Type de vitrage	U_g $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$	$R_{\text{th}}S$ $\text{m}^2\cdot\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$	**Transmission lumineuse**
Simple (8 mm)	$5,8$	$0,2$	90%
Double	$2,8$	$0,35$	80%
Triple	$1,9$	$0,5$	75%

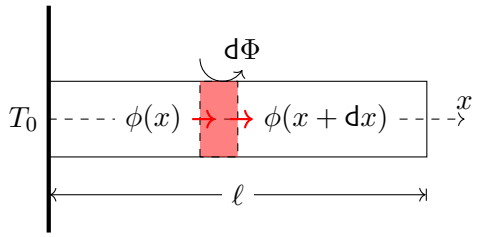
Fig 2. Coefficient d'isolation de différents vitrages.

Données :

épaisseur de verre $e \simeq 4,5$ mm ;
conductivité thermique (verre) $\lambda \simeq 0,7\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;
conductivité thermique (air) $\lambda' \simeq 28\ \text{mW}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;
surface de la fenêtre : $S \simeq 1,5\ \text{m}^2$.

EXERCICE 6 Ailette de refroidissement (⋆⋆)

Une tige de cuivre horizontale de rayon $a \simeq 2,00$ mm, de conductivité thermique $\lambda \simeq 237\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et de longueur notée $\ell \simeq 4$ cm est en contact par son extrémité $x = 0$ avec un échangeur (qui occupe la zone $x < 0$) à la température constante $T_0 \simeq 380$ K.



Elle est plongée par sa surface latérale et son extrémité $x = \ell$ avec l'air environnant à la température constante $T_e \simeq 297\ \text{K} < T_0$ et joue le rôle d'ailette de refroidissement.

On considère le problème en régime stationnaire, et on suppose que, dans la tige, la température ne dépend que de x.

Les échanges de chaleur $\text{d}\Phi$ entre la tige et le milieu extérieur se font suivant la loi de Newton :

$$\text{d}\Phi = 2\pi ah\text{d}x[T(x) - T_c]$$

où $h \simeq 190\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ aussi bien sur la surface latérale qu'à l'extrémité. On pose $\delta^2 = \frac{\lambda a}{2h}$.

1. Déterminer la loi de température $T(x)$ et sa valeur en bout d'ailette $T(\ell)$. Le bilan sur la tige en $x = \ell$ qui doit prendre en compte la convention de l'extrémité.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

On appelle rendement η de l'ailette le rapport des flux thermiques sortant de l'échangeur par la section S en $x = 0$, avec et sans ailette.

2. Calculer η. Comment évolue le rendement lorsque $\ell \to \infty$? Conclusion ?

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Conductivité thermique $\lambda(T)$ (⋆⋆)

On étudie la conduction thermique dans une barre cylindrique de longueur $\ell \simeq 20$ cm dont les parois latérales sont calorifugées. Cette barre est faite d'un matériau dont la conductivité thermique dépend de la température selon la relation $\lambda = \frac{K}{T}$, avec $K > 0$ une constante.

1. Par un bilan enthalpique, déterminer la forme mathématique de $T(x)$ en régime stationnaire.
2. On donne $T(0) = T_0 \simeq 300$ K et $T(\ell) = T_1 \simeq 350$ K. Déterminer complètement $T(x)$ et le représenter sur un graphique.
3. Étudier la puissance thermique transmise en $x = 0$ et $x = \ell$.

EXERCICE 8 Fil électrique (⋆⋆)

On cherche à déterminer l'intensité maximale pouvant traverser un fil de cuivre sans que celui-ci ne fonde. Le fil se compose d'une âme de cuivre cylindrique, de rayon r_1 : la conductivité thermique du cuivre est notée λ et sa conductivité électrique σ. L'âme du cuivre est entourée par une gaine isolante électriquement dont la forme est celle d'un tube de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 ; la conductivité thermique de l'isolant est K. On note T_f la température de fusion du cuivre et T_2 la température du milieu dans lequel se trouve le fil. On suppose que T_2 est aussi la température de surface (on ne tient pas compte de la convection).

1. Puissance dissipée par effet JOULE. On note I le courant traversant le conducteur. On suppose que la densité volumique de courant est uniforme. Calculer la puissance JOULE $\mathcal{P}_J(r)$ dissipée dans un cylindre de cuivre de rayon r, de hauteur h.
2. Température dans la gaine $(r_1 < r < r_2)$.
   - **a.** Donner la direction et le sens du vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$.
   - **b.** En notant $\Phi(r)$ le flux thermique traversant une surface cylindrique de rayon r et de hauteur h, justifier que $\Phi(r)$ est indépendant de r ; donner l'expression de $\Phi(r)$.
   - **c.** En déduire $\overrightarrow{j_{\text{th}}}(r)$ et la loi de température dans la gaine, en fonction de $T(r_1) = T_1$. En déduire la relation entre T_1 et T_2. Calculer la valeur de T_1 pour $I \simeq 100$ A.
3. Température dans le fil de cuivre $(r < r_1)$.
   - **a.** En faisant un bilan thermique dans un cylindre de rayon r, de hauteur h, en déduire la relation entre $\Phi(r)$ et $\mathcal{P}_J(r)$.
   - **b.** En déduire $\overrightarrow{j_{\text{th}}}(r)$ et la loi de température dans le fil de cuivre.
4. Conclusion.
   - **a.** Représenter $\overrightarrow{j_{\text{th}}}(r)$ pour $0 < r < r_1$. Expliquer pourquoi il y a nécessairement continuité en $r = r_1$.
   - **b.** Représenter la courbe $T(r)$ et en déduire la température $T(r = 0)$ au centre de l'âme.
   - **c.** Calculer numériquement le courant maximal pouvant être supporté par le fil. Conclure.

Données :

rayons du câble : $r_1 \simeq 0,9$ mm et $r_2 \simeq 2,1$ mm ;
conductivités thermiques : $K \simeq 0,47$ W · m^{-1} · K^{-1} et $\lambda \simeq 390$ W · m^{-1} · K^{-1} ;
conductivité électrique : $\sigma \simeq 6 \times 10^7$ S · m^{-1} ;
températures : $T_2 \simeq 303$ K et $T_f \simeq 1084$°C.

EXERCICE 9 Fusible (⋆⋆)

On considère un conducteur cylindrique de longueur ℓ parcouru par un courant d'intensité I.

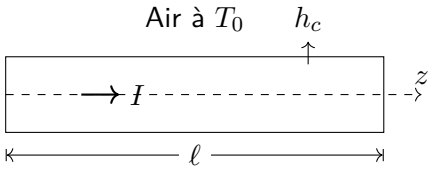


Fig 3. Schéma de fonctionnement du fusible.

La température initiale du fusible est uniforme et vaut $T(r, z, 0) = T_0$. On note respectivement μ, c et λ la masse volumique, capacité thermique et conductivité thermique du conducteur. Sa conductivité électrique γ vérifie une loi de la forme :

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_0}(1 + \beta(T - T_0)) \qquad (1)$$

avec $\beta \simeq 5,0 \times 10^{-3}$ K^{-1}. Le coefficient de transferts conducto-convectifs entre le conducteur et l'air est noté h_c.

1. Justifier l'uniformité de la température dans le métal à tout instant.
2. Expliquer l'origine de l'expression de $\frac{1}{\gamma}$, la définition et signification de β. Donner un ordre de grandeur de γ_0 pour un métal.
3. Exprimer la température T_∞ atteinte en régime stationnaire.
4. Déterminer la loi de température $T(t)$. On introduira une intensité critique I_c à interpréter.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Rayonnement

EXERCICE 10 Perte de masse du Soleil (⋆⋆⋆)

On dispose d'une plaque de cuivre de surface $S \simeq 12$ cm^2, reliée à un circuit. Un courant d'intensité I traverse une section s avec $s < S$. Trois expériences sont réalisées.

Dans la première, on éclaire un côté de la plaque pendant $\Delta t_1 \simeq 140$ s sans courant ($I = 0$), et la température augmente de $\Delta\theta_1 \simeq 11$ °C.

Dans la deuxième, la plaque est plongée dans l'obscurité et un courant $I \simeq 2,23$ A est imposé pendant $\Delta t_2 = \Delta t_1$. On observe la même élévation de température, $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1$.

Dans la troisième, on éclaire la plaque pendant 70 s, puis on la place dans l'obscurité. La résistance mesurée avec un ohmmètre est $R \simeq 0,18$ Ω.

1. Déterminer la moyenne de la densité de courant de rayonnement j_{ray} (nommé vecteur de Poynting) reçue par la plaque.
2. Estimer la perte de masse Δm du Soleil pour une année terrestre.

Données :

distance Terre-Soleil : $d \simeq 1,5 \times 10^{11}$ m ;
masse : $M_S \simeq 2,0 \times 10^{30}$ kg du Soleil ;
rayon du Soleil : $R_s \simeq 7,0 \times 10^8$ m.

EXERCICE 11 Bilan thermique d'un astéroïde (⋆⋆)

On étudie la température au sein d'un astéroïde modélisé par une sphère de rayon R, de conductivité λ, à l'équilibre thermodynamique. De l'énergie est libérée à l'intérieur de l'astéroïde par radioactivité : pendant un temps dt, chaque élément de volume dτ de l'astéroïde reçoit une énergie $\mathcal{P}_v$dτdt, $\mathcal{P}_v$ étant une constante. On raisonne sur une sphère de rayon $r < R$, indéformable et au repos.

1. De quelles variables dépend la température dans l'astéroïde ?
2. Calculer la chaleur cédée par la sphère de rayon r par conduction, en fonction notamment de la conductivité λ de l'astéroïde et du rayon r de la sphère.
3. Calculer la chaleur créée dans la sphère de rayon r par radioactivité.
4. Énoncer le premier principe de la thermodynamique. En déduire une relation entre ces deux chaleurs.
5. Exprimer $T(r)$ en fonction de λ, $\mathcal{P}_v$, r et T_0 la température au centre de l'astéroïde.

L'astéroïde émet à sa surface par rayonnement une puissance surfacique $\mathcal{P}_{ray} = \sigma T_s^4$, avec σ une constante et T_s la température de surface.

6. Déterminer la température T_0 au centre de l'astéroïde en fonction de R, λ, σ et $\mathcal{P}_v$.

EXERCICE 12 Température des planètes (⋆⋆)

Il est possible de déterminer la température de surface d'un astre à partir de très peu de données : le rayon R_s du Soleil, sa température de surface T_s et leur distance d d'éloignement.

On considère, pour ce modèle, que le Soleil est un corps sphérique (de rayon $R_s \simeq 6,96 \times 10^5$ km) modélisé par un corps noir, rayonnant un flux thermique φ surfacique conformément à la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\varphi = \sigma T_s^4 \qquad (2)$$

avec $\sigma \simeq 5,67 \times 10^{-8}$ W · K^{-4} · m^{-2} la constante de Stefan, et $T_s \simeq 5800$ K sa température de surface.

1. Exprimer l'aire de la surface sphérique S du Soleil en fonction de son rayon R_s. En déduire le flux total Φ rayonné à travers cette surface S en fonction de φ et de S puis en fonction de R_s, σ et T_s. Calculer Φ.
2. Ce flux Φ est conservé sur une surface sphérique de rayon d. En déduire le flux thermique surfacique $\varphi(d)$ en fonction de φ_0, R_s et d.

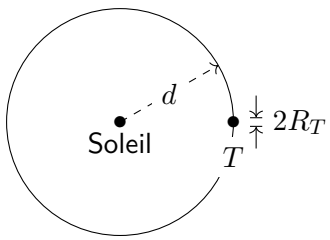


Fig 4. Rayonnement thermique du Soleil.

3. En déduire l'expression du flux thermique total $\Phi_{S\to T}$ arrivant du Soleil sur la Terre.
4. La Terre est supposée à l'équilibre thermodynamique, à la température T_T : c'est-à-dire que tout le flux radiatif incident est réémis selon la loi de Stefan-Boltzmann :

$$-\Phi_{S\to T} = \sigma T_T^4 \times (4\pi R_T^2) \qquad (3)$$

En déduire une expression de la température terrestre T_T en fonction de R_S, d et T_S.

5. Préciser les températures de surface théoriques des astres suivants :

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Lune	Mars
d (Mkm)	58	108	150	150	228
T (en K)					
$T_{\text{réel}}$ (en K)	440	737	298	250	210

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

6. Comparer vos valeurs aux températures réelles de ces astres.
7. Quelle est, selon-vous, l'origine de la température anormalement élevée de Vénus ?

Viser l'X

EXERCICE 13 Mammifère marin (⋆)

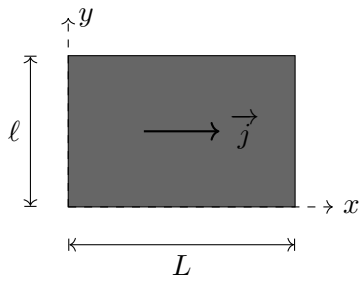
On assimile un mammifère marin à une sphère de rayon R plongé dans l'eau à température T_0. La température de surface de la peau est notée T_c.

1. Expliquer pourquoi il n'existe pas de petits mammifères marins.

Données : $R \simeq 25$ cm, $T_0 \simeq 20°$C, $T_c \simeq 30°$C, $\lambda_{\text{eau}} \simeq 0,6$ USI, $\lambda_{\text{air}} \simeq 0,024$ USI

EXERCICE 14 Composant électronique (⋆⋆⋆)

Une plaque métallique de largeur ℓ, de longueur L et d'épaisseur e est parcourue par un courant électrique de densité volumique $\overrightarrow{j} = j_0 \, \overrightarrow{u_x}$ uniforme et constante.



Le matériau constituant la plaque a une conductivité électrique σ et une conductivité thermique γ. La plaque échange avec l'air environnant une puissance surfacique $\mathcal{P}$ conforme à la loi de NEWTON :

$$\mathcal{P}(x,y) = h(T(x,y) - T_0)$$

1. Déterminer le profil de température dans la plaque et la puissance thermique dissipée sur toute la surface.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/