8 - Diffusion thermique hors l'ARQS

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Température dans une barre (⋆)

On considère une barre homogène de capacité thermique massique c, calorifugée latéralement, de conductivité thermique λ, de masse volumique μ et de longueur L. On considère que sa température ne dépend spatialement que de x.

1. Rappeler la relation entre $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ et T. Comment s'appelle la loi en question ?
2. Établir l'équation de la chaleur dans la barre. Pourquoi utilise-t-on c et non c_p ou c_v ? Pourquoi ne pas utiliser l'enthalpie H ?
3. En régime permanent, on a $T(0) \mathrel{\hat{=}} T_0$ et $T(L) \mathrel{\hat{=}} T_1$. Calculer $T(x)$.

À l'instant initial :

$$T(x,0) = T_0 + (T_1 - T_0)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

On cherche la solution sous la forme d'une fonction à variables séparables $T(x,t) = T_0 + f(t)g(x)$.

4. Établir les deux équations différentielles et trouver $T(x,t)$.

EXERCICE 2 Refroidissement d'un métal (⋆⋆)

On considère le protocole expérimental suivant :

- Prendre un bloc de fer, cylindrique et de masse m et l'immerger dans de l'eau bouillante à $T_0 \simeq 100°\text{C}$.
- Retirer le bloc de fer de l'eau bouillante, déclencher le chronomètre et sécher brièvement le bloc avec un peu de papier essuie-tout.
- Relever la température de surface $T(t)$ du bloc de fer à l'aide d'une caméra thermique.

On rappelle que tout corps « noir » de température T non nulle émet des radiations (essentiellement infrarouges dans cette situation) dont le flux thermique Φ est donné par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\Phi = S \times \sigma T^4 \qquad (1)$$

avec $\sigma \simeq 5,67 \times 10^{-8}$ W · K^{-4} · m^{-2} la constante de Stefan et S la surface du corps. Un corps dit « gris » émet quant à lui un flux thermique $\Phi' = \varepsilon\sigma T^4 S$ avec $0 < \varepsilon < 1$ l'émissivité du matériau. La caméra thermique est sensible à Φ', il faut donc prendre en compte l'émissivité du matériau dont on mesure la température.

1. En mesurant la température du fer plongé dans l'eau bouillante (à $100°\text{C}$), on mesure une température de $T_0' \simeq 80°\text{C}$ à la caméra thermique. En déduire l'émissivité ε du bloc de fer.

On relève la température du bloc de fer au cours du temps. Pour modéliser l'évolution temporelle de sa température, on adopte le modèle phénoménologique de Newton pour modéliser les flux thermiques pariétaux, c'est-à-dire incluant la convection avec l'air (de température T_∞) à la surface du métal et le rayonnement de la surface chaude. Le flux thermique est ainsi :

$$\Phi = hS(T - T_\infty) \qquad (2)$$

2. Relier le flux thermique Φ au transfert thermique δQ reçu par le bloc de fer sur un instant $\mathrm{d}t$.
3. À partir du premier principe de la thermodynamique, montrer que la température $T(t)$ du bloc de métal est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t) + aT(t) = aT_\infty$$

où a est une constante dont l'expression est à déterminer.

4. Résoudre cette équation différentielle et donner l'expression de $T(t)$ en fonction de a, T_0 et T_∞.

EXERCICE 3 Âge de la Terre (⋆⋆)

Au milieu du XIX$^{\text{e}}$ siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre avait été formée à une température élevée T_1 uniforme à la date $t = 0$. Il a proposé d'autre part qu'à cette même date, sa surface avait été soumise instantanément à une température T_S. Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé le refroidissement pour en déduire l'âge de la Terre. La densité de flux thermique est donc une fonction de la profondeur et du temps $q(z,t)$.

On néglige la sphéricité et les sources radioactives de la planète, mais on ne se place pas en régime stationnaire. On admet que la température dépend de t et de la profondeur z comptée positivement. Elle vérifie l'équation de diffusion :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t}(z,t) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z,t) \qquad (3)$$

où μ est la masse volumique, c la capacité thermique massique à pression constante et λ la conductivité thermique.

1. Démontrer l'équation différentielle vérifiée par la puissance surfacique q :

$$\frac{\partial q}{\partial t}(z,t) = D\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}(z,t) \qquad (4)$$

dans laquelle on notera D la diffusivité thermique $D = \frac{\lambda}{\mu c}$.

2. Dans l'hypothèse de Lord KELVIN, quelle doit être la valeur de la densité de flux thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers zéro et lorsqu'il tend vers l'infini ? Quelle doit être la valeur de la densité de flux thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers zéro et lorsqu'il tend vers l'infini ?
3. Vérifier que la solution proposée par Lord KELVIN :

$$q(z,t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$$

où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre est bien la bonne. Dessiner schématiquement la valeur absolue de la densité de flux thermique en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.
4. Les paramètres du problème sont $T_1 - T_S$, λ, μ et c. On suppose que A s'exprime par :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(T_1 - T_S)^\alpha \lambda^\beta \mu^\gamma c^\delta$$

Déterminer par analyse dimensionnelle, les valeurs des exposants de cette loi.
5. Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre $\frac{\partial T}{\partial z}$.

Lord KELVIN a admis que $T_1 - T_S$ était de l'ordre de 1000 à 2000 K et que D est proche de 10^{-6} $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

6. Sachant que l'augmentation de température mesurée dans les mines indiquait un gradient proche de $\gamma_T \simeq 30$ $\mathrm{K \cdot km^{-1}}$, quel âge de la Terre Lord KELVIN a-t-il déduit de son modèle ?
7. Que pensez-vous de l'estimation précédente ? Quel est le ou les ingrédients que Lord KELVIN n'aurait pas dû négliger ?

L'essentiel

EXERCICE 4 Lac gelé (⋆⋆)

On considère un lac où l'eau liquide est en permanence à la température de congélation $T_i \simeq 273$ K. L'air au-dessus du lac est à la température constante $T_a \simeq 263$ K.

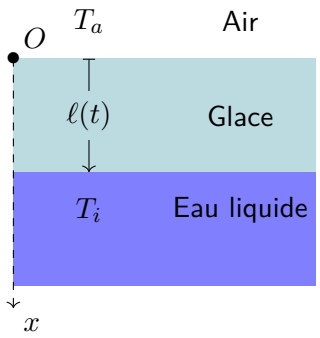


Fig 1. Épaisseur de glace.

Libre de glace à l'instant initial $t = 0$, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur est notée $\ell(t)$ à l'instant t. Les échanges thermiques entre la surface libre de la glace et l'air s'effectuent par convection : la puissance thermique échangée par unité de surface de glace vaut $h(T_0(t) - T_a)$, où $T_0(t)$ est la température de la glace en $x = 0$.

On pose $\ell_0 = \frac{\lambda}{h}$ et $\tau = \frac{\lambda \mu L_f}{2h^2(T_i - T_a)}$.

1. Déterminer la distribution de température $T(x,t)$ en régime lentement variable dans la glace en fonction de $T_0(t)$, T_i, $\ell(t)$ et x.
2. Établir deux relations entre $\ell(t)$ et $T_0(t)$. En déduire l'expression de $\ell(t)$.
   Donner les valeurs numériques de ℓ_0 et τ. Discuter de l'approximation stationnaire.
3. Quelle est l'épaisseur de glace formée au bout d'une journée ? Combien de temps faut-il attendre pour former 1 m de glace ?
4. Comment évolue la température à la surface du lac ?

Données :

masse volumique (glace) :
$\mu \simeq 900$ $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
conductivité thermique (glace) :
$\lambda \simeq 2,1$ $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
chaleur latente de fusion :
$L_f \simeq 334$ $\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$
coefficient conducto-convectif :
$h \simeq 42$ $\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$

EXERCICE 5 Effet de cave (⋆⋆)

On considère le sol, de masse volumique μ, de chaleur massique c et de conductivité thermique λ. On note z la profondeur dans le sol par rapport au point O à la surface. L'axe Oz est donc descendant.

On étudie le champ spatio-temporel de la température $T(z,t)$ dans le sol en fonction de la température de surface. La température de surface évolue de manière périodique sur une journée :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$T(0,t) \;=\; T_0 + \alpha \times \cos(\omega t)$$

avec $T_0 = T(\infty, t)$ la température en profondeur dans le sol. On pose $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$.

1. Établir l'équation de diffusion thermique.
2. En déduire le champ de température $T(z,t)$ en le cherchant sous la forme :

$$T(z,t) = T_0 + \Theta(z,t)$$

avec $\underline{\Theta}(z,t) = \underline{f}(z) e^{j\omega t}$.

On cherche à décrire la température $T(2\ \text{m}, t)$ dans une cave située à 2 m de profondeur en fonction de la variation annuelle de la température. Pour une période $\Delta t \;\simeq\; 1$ an, on prendra les valeurs suivantes : $T \;\simeq\; -5°\text{C}$ pour $t = 0$ et $T \;\simeq\; +30°\text{C}$ pour $t = \frac{\Delta t}{2}$.

3. Sachant que $D = \frac{\lambda}{\mu c} \;\simeq\; 1,7 \times 10^{-7}$ SI, déterminer l'amplitude des variations de température. Reprendre la question pour les variations journalières de température. Conclure sur l'effet de cave.

EXERCICE 6 Diffusion dans un tore (⋆⋆⋆)

Un tore de section carrée $a \times a$ et de rayon intérieur a (donc de rayon extérieur $2a$) est fabriqué dans un matériau de masse volumique μ, de capacité calorifique massique c et de conductivité thermique λ. Le profil des températures possède la symétrie cylindrique : T ne dépend que du rayon r et du temps t soit $T(r,t)$.

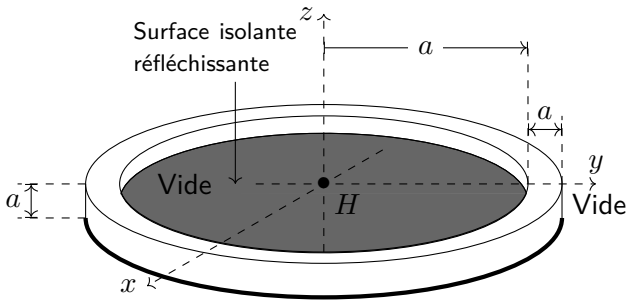


Fig 2. Tore isolé thermiquement.

La face intérieure ($r = a$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $z \in [0, a]$) et la face extérieure ($r = 2a$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $z \in [0, a]$) sont placées dans le vide. Sur les faces parallèles ($z = 0$ ou $z = a$), on pose deux disques parfaitement isolants thermiquement et de surfaces parfaitement réfléchissantes (seul celui du bas est représenté sur la *Figure 2*).

1. En effectuant un bilan thermique sur la portion torique définie par l'intervalle $[r, r + \mathrm{d}r]$, montrer que le champ des températures vérifie l'*équation 5* :

$$\xi r \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} \qquad (5)$$

où l'on exprimera ξ en fonction des grandeurs caractéristiques du matériau et où l'on précisera son unité.

On cherche, pour cette *équation 5*, une solution stationnaire à variables séparées sous la forme :

$$T(r,t) \;=\; \rho(r)\ \eta(t)$$

2. Établir les deux équations différentielles vérifiées respectivement par $\rho(r)$ et $\eta(t)$ en faisant apparaître une constante χ commune à ces deux équations.
3. Déterminer l'expression de $\eta(t)$ sans chercher à caractériser la ou les constantes d'intégration. Quel est le signe de χ ?

Pour la fonction $\rho(r)$, on cherche une solution développable en série entière sous la forme :

$$\rho(r) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\ r^n$$

4. Après avoir rapidement justifié cette recherche, déterminer les expressions des α_{2p} et des α_{2p+1} pour tout entier p positif ou nul.
5. En examinant tous les transferts thermiques possibles sur la face interne, justifier le fait que $\left.\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a} \;=\; 0$.

NB : La fonction $\rho(r)$ qui admet le développement en série déterminé à la *question* 4 et qui vérifie la condition aux limites imposée par la *question* 5 s'exprime en utilisant les fonctions de Bessel de première (J) et de deuxième (Y) espèces : $\rho(r) = K \left[J_0(r) - \frac{J_1(a)}{Y_1(a)} Y_0(r) \right]$

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Neutronique en réacteur (⋆⋆⋆)

On étudie la diffusion des neutrons dans la matière fissile d'un réacteur à neutrons rapides. En tout point $\overrightarrow{r}$, $\mu(\overrightarrow{r}, t)$ est le nombre de neutrons par unité de volume et $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r}, t)$ leur vitesse. En raison des multiples collisions, on suppose $v = ||\overrightarrow{v}||$ uniforme. En coordonnées sphériques avec invariance en θ et φ :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}$$

La loi de diffusion des neutrons dans le matériau fissile s'écrit $\mu(\overrightarrow{r}, t) \overrightarrow{v}(\overrightarrow{r}, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}}\,(\mu(\overrightarrow{r}, t))$.

1. Préciser le signe, l'unité et le nom du coefficient D.
2. En supposant qu'aucun neutron n'est absorbé ou émis, déduire l'équation aux dérivées partielles pour $\mu(\overrightarrow{r}, t)$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. Le nombre de neutrons cédés au milieu par unité de volume et de temps est $\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}\right)_m = \Sigma v \mu$. Préciser l'unité et le signe de Σ selon que la fission domine ou non l'absorption.
4. Écrire l'équation aux dérivées partielles pour μ en supposant $\Sigma > 0$.

   Le milieu fissile est sphérique de rayon R ; μ ne dépend donc que de r (distance au centre O) et du temps t.

   a. Trouver $\mu(r)$ en régime stationnaire, justifier les conditions aux limites, montrer que ce régime existe uniquement si $R < R_c$ et exprimer R_c.

   b. Si $R < R_c$ ou $R > R_c$, montrer qu'il existe des solutions de la forme $\mu(r,t) = e^{\gamma t}\varphi(r)$ et interpréter.

EXERCICE 8 Perte de masse du Soleil (⋆⋆⋆)

On dispose d'une plaque de cuivre de surface $S \simeq 12$ cm^2, reliée à un circuit. Un courant d'intensité I traverse une section s avec $s < S$. Trois expériences sont réalisées.

Dans la première, on éclaire un côté de la plaque pendant $\Delta t_1 \simeq 140$ s sans courant ($I = 0$), et la température augmente de $\Delta\theta_1 \simeq 11$ °C.

Dans la deuxième, la plaque est plongée dans l'obscurité et un courant $I \simeq 2,23$ A est imposé pendant $\Delta t_2 = \Delta t_1$. On observe la même élévation de température, $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1$.

Dans la troisième, on éclaire la plaque pendant 70 s, puis on la place dans l'obscurité. La résistance mesurée avec un ohmmètre est $R \simeq 0,18$ Ω.

1. Déterminer la moyenne de la densité de courant de rayonnement j_{ray} (nommé vecteur de Poynting) reçue par la plaque.
2. Estimer la perte de masse Δm du Soleil pour une année terrestre.

Données :

distance Terre-Soleil : $d \simeq 1,5 \times 10^{11}$ m ;
masse : $M_S \simeq 2,0 \times 10^{30}$ kg du Soleil ;
rayon du Soleil : $R_s \simeq 7,0 \times 10^8$ m.

Viser l'X

EXERCICE 9 Fonte d'un glaçon (⋆⋆⋆)

Un glaçon sphérique de rayon initial 1 cm est immergé dans de l'eau liquide de température 10°C. On suppose que la glaçon fond suffisamment lentement pour rester sphérique au cours du temps.

1. Déterminer l'évolution du rayon du glaçon en fonction du temps. En déduire la durée de fusion complète du glaçon.

Données :

chaleur latente de fusion de la glace
$L_f \simeq 335$ kJ · kg^{-1} ;
conductivité thermique de la glace
$\lambda \simeq 0,6$ W · K^{-1} · m^{-1} ;
masse volumique de la glace $\mu_g \simeq 917$ kg · m^{-3} ;
laplacien d'une fonction f en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

EXERCICE 10 Banquise artique (⋆⋆⋆)

On étudie la formation de la banquise pendant les quatre mois lunaires à une latitude de 80°. L'air est à la température ambiante de $T_a \simeq -20$°C et l'eau à $T_e \simeq 0$°C. On considère des échanges conducto convectifs entre la couche de glace et l'air ambiant et on considère qu'il n'y a au départ aucune banquise.

1. Sachant que l'eau salée gèle à -2°C, calculer l'épaisseur de glace au bout de 4 mois.

Lors du dégel, le Soleil rayonne une puissance surfacique moyenne $\mathcal{P} \simeq 250$ W · m^{-2}. L'albédo de la neige fraîche étant $\alpha \simeq 0,95$.

2. Quelle épaisseur fond pendant les quatre mois solaires ?
3. Dans les faits, toute la glace a fondu à la fin des mois solaires. Expliquer ce phénomène.

Données :

chaleur latente de fusion de la glace : 335 kJ · kg^{-1}.
conductivité thermique de la glace : 2 W · m^{-1} · K^{-1}.
coefficient de newton conducto-convectif :
$h \simeq 50$ W · m^{-2} · K^{-1}.
masse volumique de la glace : 900 kg · m^{-3}.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/