6 - Équilibres thermodynamiques

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Pression en altitude (⋆)

Calculer la pression atmosphérique au sommet du Mont Blanc (4807 m) dans les deux cas suivants :

1. On suppose que la température de l'atmosphère est constante et égale à T_0.
2. On suppose que la température varie avec l'altitude suivant la loi :

$$T = T_0 - a \times z$$

avec $a \simeq 6,45 \times 10^{-3}$ K · m^{-1}.

Données :

- Température à l'altitude $z \simeq 0$: $T_0 \simeq 290$ K ;
- pression à l'altitude $z \simeq 0$: $p_0 \simeq 1,013$ bar ;
- masse molaire de l'air : $M \simeq 29$ g · mol^{-1}.

EXERCICE 2 Expérience de Jean Perrin (⋆⋆)

Au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, Jean Perrin a mesuré le nombre d'Avogadro en introduisant des sphérules (toutes petites sphères) de caoutchouc végétal dans une cuve remplie d'eau maintenue à une température constante $T \simeq 293$ K. La cuve est un parallélépipède de base carrée (longueur L selon Ox et Oy) et de hauteur $h \simeq 100$ μm selon Oz. On note N le nombre total de sphérules introduites.

Données :

rayon d'une sphérule : $r \simeq 0,212$ μm ;
masse volumique de l'eau : $\mu \simeq 1,003$ g · mL^{-1} ;
masse volumique des sphérules :
$\rho \simeq 1,194$ g · mL^{-1} ;
accélération de la pesanteur : $g \simeq 9,8$ m · s^{-2}.

1. Chaque sphérule est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède qu'elle subit de la part de l'eau.
   - **a.** Exprimer l'énergie potentielle totale d'une sphérule $\mathcal{E}_p(z)$ en fonction de son altitude z au-dessus du fond de la cuve.
   - **b.** Calculer $\mathcal{E}_p(h)$, énergie potentielle au sommet de la cuve.
2. On suppose que les sphérules obéissent à la statistique classique de Boltzmann. Établir la condition de normalisation. Compte-tenu de la valeur numérique obtenue à la question précédente, simplifier l'expression obtenue.
3. Calculer la probabilité $\mathrm{d}\mathbb{P}(z)$ pour qu'une sphérule soit située dans une tranche de la cuve délimitée par les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$, quelle que soit sa vitesse. En déduire le nombre moyen $\mathrm{d}N(z)$ de sphérules situées entre z et $z + \mathrm{d}z$, en fonction de R, T, r, ρ, μ, g, z et $\mathrm{d}z$.

Jean Perrin a divisé la cuve en tranches de très petites épaisseurs e, situées à différentes altitudes z_i qu'il a observées au microscope en prenant des photos de chaque tranche. Il a pu en déduire le nombre moyen N_i de sphérules dans chaque tranche. Ses résultats sont donnés dans le tableau de la *Figure 1*.

z_i (en μm)	5	35	65	95
N_i	100	47	23	12

Fig 1. Résultats expérimentaux.

4. Déduire de ces mesures une valeur de la constante de Boltzmann, puis du nombre d'Avogadro.

L'essentiel

EXERCICE 3 Désaimantation adiabatique (⋆⋆)

On considère un sel d'alun paramagnétique d'aimantation M (exprimée en A · m^{-1}) suivant la loi de Curie :

$$\overset{\hookrightarrow}{M} = \gamma \frac{\overset{\hookrightarrow}{B}}{T}$$

avec T la température et γ un coefficient spécifique au matériau. Sous l'effet d'un champ magnétique, les moments magnétiques du sel s'alignent avec le champ, produisant une aimantation M. Cet alignement, exothermique, conduit à la dissipation de l'énergie thermique via un circuit de refroidissement. Une fois le sel isolé thermiquement, le champ $\overset{\hookrightarrow}{B}$ est réduit progressivement, dans une transformation adiabatique réversible.

L'entropie massique s du matériau dépend de l'énergie interne massique u et de l'aimantation M, selon la relation :

$$\mathrm{d}s = \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_M \mathrm{d}u + \left(\frac{\partial s}{\partial M}\right)_u \mathrm{d}M$$

1. Par une analyse dimensionnelle des termes apparaissant dans l'expression de $\mathrm{d}s$, identifier la température thermodynamique T et le champ magnétique B à partir de $\left(\frac{\partial s}{\partial U}\right)_M$ et $\left(\frac{\partial s}{\partial M}\right)_u$.
2. Établir l'expression analogue de la première identité thermodynamique $\mathrm{d}u(s, M)$ en fonction de $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}M$. Comment interpréter le terme qui dépend de $\mathrm{d}M$?

On nomme enthalpie magnétique la grandeur $h = u - BM$. Cette grandeur ne dépend expérimentalement que de la température T du matériau, on note ainsi $c_B = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_B$ sa capacité thermique à champ magnétique constant.

3. Établir l'équivalent de la deuxième identité thermodynamique et de la deuxième loi de JOULE en exprimant $\mathrm{d}h$ en fonction de $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}B$ d'une part et $\mathrm{d}T$ d'autre part.
4. En déduire une expression de $\mathrm{d}s$ en fonction de c_B, γ, B, T et de leurs variations $\mathrm{d}T$ et $\mathrm{d}B$.

Pour une fonction à deux variables $s(T, B)$ de classe C^2, le théorème de SCHWARTZ précise que :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial B \partial T} = \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial B}$$

5. Montrer que :

$$\left(\frac{\partial c_B}{\partial B}\right)_T = -\eta \frac{\gamma B}{T^2}$$

avec η une constante numérique à identifier.

6. Dans la gamme de température considérée, $c_B(T, B = 0) = \frac{\alpha}{T^2}$ avec α une constante dépendant du matériau. En déduire l'expression de $c_B(T, B)$.

Le réfrigérant est soumis à un champ magnétique de $B_i \simeq 20$ mT et refroidi à une température $T_i \simeq 350$ mK avant d'être isolé thermiquement. Le champ magnétique est lentement abaissé jusqu'à une valeur résiduelle de $B_f \simeq 2,0$ mT. Déterminer l'expression de la température finale T_f en fonction de γ, α, B_f, B_i et T_i.

7. Dans les conditions de l'expérience, nous pouvons annuler le paramètre α, en déduire l'expression simplifiée de T_f en fonction de B_f, B_i et T_i puis sa valeur numérique.

EXERCICE 4 Anomalie gravitationnelle (⋆⋆)

La gravimétrie étudie les variations du champ de pesanteur pour déterminer la répartition des masses dans la Terre et ainsi comprendre sa structure. Elle est utilisée en géodésie pour déterminer la forme de la Terre, en génie civil et en archéologie pour détecter des cavités, et en hydrologie pour suivre les stockages d'eau.

Nous cherchons ici à déterminer les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol de masse volumique moyenne μ_m par une analyse gravimétrique en *Figure 2*.

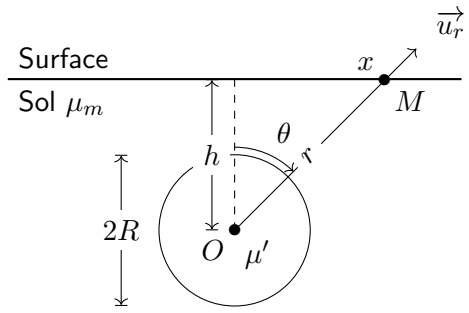


Fig 2. Anomalie gravitationnelle.

1. En utilisant le théorème de GAUSS gravitationnel, déterminer l'expression du champ de gravitation en un point M situé à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon R et de masse volumique $\mu' = \mu_m + \Delta\mu$ en fonction de μ_m, $\Delta\mu$, G, R, r, distance de M au centre de la sphère, et du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}$ (en *Figure 2*).
2. Déterminer g_{Bz}, la composante verticale du champ de pesanteur créé par la boule au point M situé à une distance x de la verticale.
3. Montrer que l'anomalie gravimétrique $\Delta g = g_{Bz} - g_0$, qui fait varier le champ de pesanteur apparent en un lieu, est identique au champ de pesanteur g'_z créé par une sphère de masse volumique $\Delta\mu$.
4. Montrer que l'anomalie gravimétrique s'écrit

$$\Delta g = \frac{4\pi G \Delta\mu R^3 h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}} \qquad (1)$$

5. Tracer l'allure de la courbe Δg en fonction de x pour des sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 > h_1$.
6. Quel est le lien entre la profondeur h et la largeur à mi-hauteur de la courbe ? Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale ?
7. Déterminer, à l'aide de la courbe de la *Figure 3*, la profondeur h et le rayon R de la sphère enterrée.

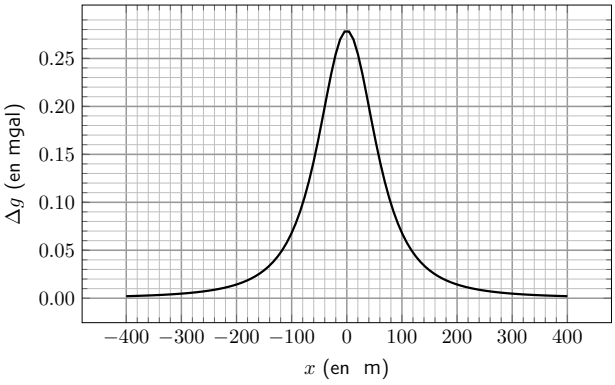


Fig 3. Anomalie gravimétrique Δg pour une sphère enterrée avec $\Delta\mu = 1000$ kg · m^{-3}.

EXERCICE 5 Accrétion d'une étoile (⋆⋆)

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Les étoiles sont décrites comme des boules homogènes de masse M et de rayon R en équilibre sous l'action de leur propre gravitation et de diverses forces antagonistes qui s'opposent à l'effondrement de l'étoile, notamment leur pression thermodynamique.

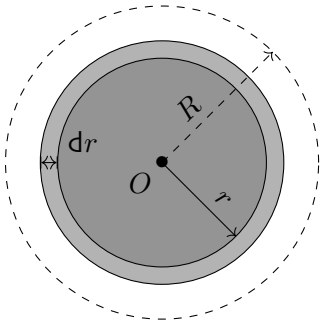


Fig 4. Constitution d'une étoile de rayon R par ajout une calote sphérique d'épaisseur $\mathrm{d}r$ sur un astre déjà formé de rayon r.

On définit $\mathcal{E}_g$ comme l'énergie *fournie* à l'étoile pour la constituer à partir d'un nuage de gaz froid et diffus, sans interaction car étendu sur de grandes distances. La constitution de l'étoile se fait avec une évolution *quasi-statique*, l'opérateur agissant à tout instant pour compenser exactement les forces gravitationnelles.

1. Exprimer la masse volumique ρ de l'étoile à partir de M et R, puis en déduire la masse $m(r)$ de l'astre déjà constitué de rayon r et la masse $\mathrm{d}m$ ajoutée par une calotte sphérique d'épaisseur $\mathrm{d}r$ et de même masse volumique ρ.
2. Justifier que la contribution $\mathrm{d}\mathcal{E}_g$ à l'énergie gravitationnelle de cet accroissement s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_g = -\mathcal{G}\frac{m\mathrm{d}m}{r}$$

   En déduire l'énergie gravitationnelle totale $\mathcal{E}_g$ de l'étoile en fonction de $\mathcal{G}$, M et R, avec $\mathcal{G}$ la constante de gravitation.

On s'intéresse désormais à l'équilibre mécanique d'une tranche de fluide située entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ dans l'étoile. Le champ gravitationnel local est noté $\overrightarrow{G}(r) = G(r)\,\overrightarrow{u_r}$ avec $G(r) < 0$ de sorte que la force de gravitation ressentie par une masse $m^\star$ quelconque soit $m^\star\overrightarrow{G}(r)$. On note désormais $\rho(r)$ la masse volumique du gaz à l'altitude r.

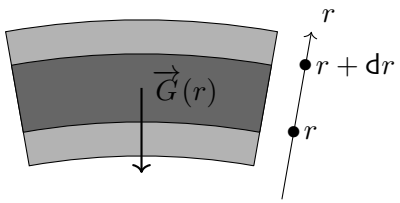


Fig 5. Tranche de fluide contracté sous l'effet du champ de gravitation de l'étoile.

3. Réaliser un bilan des forces auxquels est soumise la colonne de fluide de section S entre les altitudes r et $r + \mathrm{d}r$. En déduire une équation différentielle liant la pression $p(r)$, la masse volumique $\rho(r)$ et le champ de gravité $G(r)$.
4. Appliquer le théorème de Gauss gravitationnel pour exprimer le champ de gravitation $\overrightarrow{G}(r)$ hors de l'astre.

Dans l'astre (pour $r < R$), ce champ s'écrit :

$$\overrightarrow{G}(r) = -\frac{\mathcal{G}Mr}{R^3}\,\overrightarrow{u_r}$$

5. En déduire que l'évolution de la pression $p(r)$ suit une loi de la forme :

$$p = p_\mathrm{m}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

   avec p_m à exprimer en fonction de $\mathcal{G}$, M et R.
6. Dans quel type de système thermodynamique peut-on considérer que l'énergie cinétique d'agitation microscopique vérifie :

$$\mathcal{E}_c = \frac{3}{2}pV$$

   pour un système de volume V à pression p ? Énoncer le nom des théorèmes utilisés et les hypothèses faites.

On supposera cette condition vérifiée ici.

7. Calculer l'énergie cinétique totale de l'étoile en fonction de $\mathcal{G}$, M et R. Établir une relation simple entre $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{E}_g$.

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Nucléation (⋆⋆)

Les chambres à brouillard sont des appareils qui permettent de repérer la trajectoire des particules à l'instar de celles représentées sur la *Figure 6*.

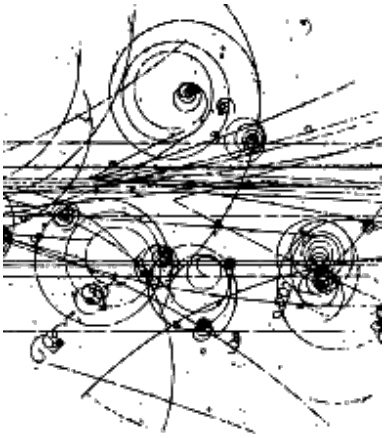


Fig 6. Trajectoire de particules dans la chambre à brouillard.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Le principe de détection repose sur la nucléation métastable de vapeur d'alcool dans une chambre refroidie à $-20°C$. Le passage d'une particule dans la vapeur d'alcool laisse un sillon de rosée d'alcool.

1. En considérant un cristal cubique (paramètre de maille a) de N^3 atomes (avec $N \gg 1$) liés à leurs voisins par une énergie de liaison $-\frac{\epsilon}{3}$, montrer que l'énergie potentielle de cohésion $\mathcal{E}$ du cristal prend la forme :

$$\mathcal{E} = -\alpha V + \gamma S$$

avec respectivement V et S le volume et la surface du cristal et α et γ à exprimer en fonction de ϵ et a. Analyser l'influence d'une variation de volume V et d'une variation de surface S sur l'énergie du cristal.

Dans le cas d'une goutte d'alcool en nucléation à $-20°C$, $\alpha = (p_{sat} - p)$ avec $p_{sat} \simeq 3,4$ mbar la pression de saturation et p la pression partielle de l'alcool (de l'ordre de 80 mbar correspondant à la pression de saturation à $25°C$). Le coefficient $\gamma \simeq 22,3 \times 10^{-3}$ N · m^{-1} est appelé *tension de surface*.

2. Exprimer l'énergie de cohésion $\mathcal{E}(r)$ de la goutte sphérique de rayon r. Identifier un rayon critique r_c en deçà duquel la goutte liquide est instable et s'évapore. Identifier l'expression de l'énergie de nucléation $\mathcal{E}_0$. Interpréter le phénomène de surcondensation observé sur les vapeurs d'alcool.

La transformation physique $CH_3 - CH_2 - OH_{(g)} \rightarrow CH_3 - CH_2 - OH_{(\ell)}$ est considérée statistiquement aléatoire et suivant une loi d'Arrhénius dont la densité volumique de probabilité par unité de temps est de la forme :

$$Ae^{-\frac{\mathcal{E}_0}{k_B T}}$$

3. Exprimer la probabilité $d\Sigma$ d'observer une nucléation entre les instants t et $t + dt$ dans l'enceinte de volume V_0. $\Sigma(t)$ représente ainsi la probabilité d'observer une nucléation entre l'instant 0 et l'instant t. Identifier la constante de temps du phénomène.

Le passage d'une particule dans les vapeurs d'alcool a un effet équivalent à une diminution de la valeur de $\mathcal{E}_0$.

4. Expliquer pourquoi un sillon de goutelettes se forme sur la passage de la particule.

EXERCICE 7 Système auto-gravitant (⋆⋆⋆)

On modélise une étoile en formation par une boule de gaz dont les constituants sont uniquement en interaction gravitationnelle. Ce système est isolé thermiquement et mécaniquement et constitue ce que l'on appelle un système auto-gravitant.

On note $\mu(r)$ la masse volumique du gaz, supposé parfait, $p(r)$ sa pression, et $\overrightarrow{G}(r)$ l'intensité du champ gravitationnel en un point M distant de r du centre O de l'étoile.

1. Justifier que les grandeurs servant à décrire le problème dépendent uniquement de la coordonnée radiale. Justifier la direction du champ gravitationnel.

L'intensité du champ gravitationnel au sein d'une sphère de rayon r est donné par :

$$G(r) = -\frac{\mathcal{G}}{4\pi r^2} \int_0^r 4\pi u^2 \mu(u) du$$

2. On considère une particule de gaz subissant une évolution isentropique. Montrer que sa pression p et sa masse volumique μ vérifient :

$$\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0 \qquad (2)$$

On pose $A \triangleq \frac{p(r)}{\mu^\gamma(r)}$.

3. Établir l'équation de la statique des fluides en considérant l'*équation 2* vérifiée avec $\gamma = 2$ et montrer que la pression p vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\mu}\frac{dp}{dr}\right) = -\mu \mathcal{G} r^2$$

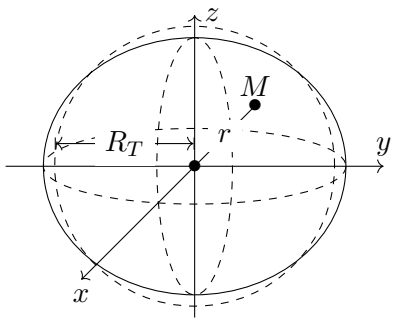
4. Résoudre l'équation différentielle sur $\mu(r)$ en posant $w(r) = r\mu(r)$ et tracer le profil de masse volumique de l'étoile.

EXERCICE 8 Aplanissement des pôles (⋆⋆⋆)

Au milieu du XVIII^e siècle, le mathématicien Clairaut démontre que la Terre a la forme d'un ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire d'un corps dont les rayons équatoriaux et polaires n'ont pas la même longueur. En effet, du fait de sa rotation propre et de l'existence de la force centrifuge plus forte à l'équateur que dans les régions polaires, la Terre se déforme ; elle n'est plus sphérique mais est aplatie aux pôles.

Pour tenter de voir l'influence de la rotation de la Terre sur sa propre forme, on adopte le modèle suivant : la déformation de la Terre, liée à sa rotation propre, est suffisamment petite pour admettre que le champ de gravitation en un point M situé à la distance r du centre O de la Terre reste celui de la Terre sphérique et homogène (de masse volumique constante μ, de masse M_T et de rayon moyen R_T). De plus, on admettra qu'en première approximation, on peut trouver la forme de la Terre en considérant qu'elle se comporte comme un corps fluide.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/



Données :

masse de la Terre : $M_T \simeq 6 \times 10^{24}$ kg.
rayon terrestre $R_T \simeq 6\ 400$ km.
constante de gravitation $\mathcal{G} \simeq 6,67 \times 10^{-11}$ SI.
pour tout élément terrestre centré en P, de masse $\mathrm{d}m$, on a :

$$\iiint_{P\in V} \frac{\mathrm{d}m}{MP^3} = \frac{M_T}{R_T^3}$$

avec M un point quelconque dans la Terre.

1. Représenter clairement sur un dessin les référentiels héliocentrique, géocentrique et terrestre.
2. Quelle est, dans le référentiel géocentrique, la période de rotation propre de la Terre (appelée jour sidéral) ? Pourquoi diffère-t-elle légèrement de 1 jour ? Calculer la vitesse de rotation ω_T de la Terre dans ce référentiel.

On admettra dans la suite des calculs que le référentiel géocentrique est galiléen. La forme de la Terre possède la symétrie de révolution autour de l'axe de rotation (Oz). On considérera alors dans la suite uniquement un point M intérieur à la Terre et placé dans un plan quelconque (Oyz) contenant (Oz).

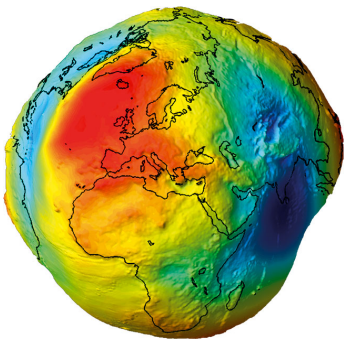


Fig 7. Allure du géoïde terrestre.

3. On note $p(y,z)$ la pression qui règne au point M.
   - **a.** Quelles sont les forces agissant sur un volume $\mathrm{d}^3\tau$ centré en M ? On exprimera le résultat en fonction des coordonnées cartésiennes y et z de M et de $r = OM$.
   - **b.** Déterminer la pression $p(y,z)$ qui règne au point M en fonction de y et z. On note p_0 la pression au centre O. Soit p_a la pression atmosphérique en tout point de la surface terrestre. Montrer que la ligne isobare à la surface de la Terre dans le plan (Oyz) est une ellipse d'équation :
   $$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
   Déterminer littéralement a et c.
   - **c.** En faisant des approximations légitimes, calculer $\Delta = a - c$ en fonction de R_T, M_T, $\mathcal{G}$ et la vitesse angulaire ω_T de rotation propre de la Terre, puis l'aplanissement $f = \frac{a-c}{c}$.

On donne le volume V de l'ellipsoïde terrestre :

$$V = \frac{4\pi a^2 c}{3}$$

Viser l'X

EXERCICE 9 Plateau continental (⋆⋆⋆)

On assimile la Terre à un astre sphérique de centre O, de rayon $R_T \simeq 6370$ km de sorte que $G(R_T) \simeq 9,81$ m · s^{-2} soit l'accélération de la pesanteur à sa surface.

On dépose un plateau en forme de calotte sphérique d'épaisseur $e \simeq 1,0$ km de masse volumique $\mu \simeq 2700$ kg · m^{-3}.

On note A le point au centre de la surface supérieure du plateau et on note Oz l'axe reliant O à A.
Données : $\mathcal{G} \simeq 6,67 \times 10^{-11}$ USI.

1. Déterminer l'écart relatif :
$$a = \frac{G(R_T) - G(A)}{G(R_T)}$$

EXERCICE 10 Disque protoplanétaire (⋆⋆⋆)

On considère un gaz parfait de masse m qui tourne autour d'une étoile de masse M (avec $M \gg m$). On suppose le gaz monoatomique et à la température T. Le gaz se répartit sous la forme d'un disque dont l'épaisseur est négligeable devant le rayon.

1. En notant $n(r,z)$ la densité de particules (exprimée à l'aide de coordonnées cylindriques), décrire l'évolution de l'épaisseur du disque.
2. Proposer un modèle d'évolution de la vitesse angulaire $\omega(r)$ du gaz autour du Soleil.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/