9 - Frottement de Coulomb

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Distance de freinage (⋆)

Une voiture réduite à son centre d'inertie M, de masse m roule à une vitesse $\overrightarrow{v} = +v\,\overrightarrow{u_x}$ sur une route parfaitement horizontale et sèche.

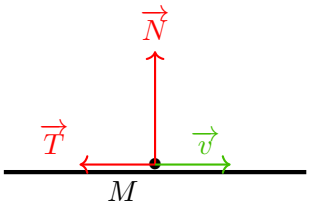


Fig 1. Réaction du support s'exerçant sur la voiture.

Elle dispose d'un ABS, système permettant de garder l'adhérence entre la roue et le sol. Un freinage s'effectue donc à la limite du glissement : la réaction du support s'écrit $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}$ avec $T = f_s N$. À l'instant initial $(t = 0)$, la voiture, qui se trouve à l'origine O du repère, freine brutalement.

1. Décrire le référentiel d'étude. Est-il galiléen ?
2. Faire un bilan des forces auxquelles est soumis la voiture M.
3. Écrire la relation fondamentale de la dynamique et identifier la composante normale $\overrightarrow{N}$ et tangentielle $\overrightarrow{T}$ de la réaction $\overrightarrow{R}$ du sol.
4. Établir l'équation du mouvement.
5. À quel instant t_0 la voiture s'arrête-t-elle ?
6. En déduire la distance de freinage en fonction de v, et la calculer pour $v = 50$ km/h. Commenter.
7. Recalculer cette distance pour une voiture qui n'est pas munie d'un ABS, dont les roues frottent en glissant sur le sol. Conclure.

Données :

coefficient de frottement statique : $f_s \simeq 0,70$
coefficient de frottement dynamique : $f \simeq 0,65$
accélération de la pesanteur : $g \simeq 9,8$ m · s^{-2}

EXERCICE 2 Rampe de valise (⋆)

On considère une valise M de masse m qui glisse le long d'un rail de longueur L avant d'embarquer dans un avion. Elle est lâchée sans vitesse initiale à une hauteur y_0. Le coefficient de frottement entre la valise et le rail est noté f.

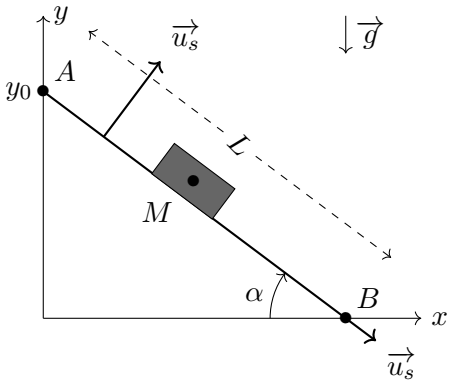


Fig 2. Modélisation de la rampe et de la valise.

1. Préciser le référentiel d'étude. Est-il galiléen ?
2. Faire un bilan des forces auxquelles est soumise la valise. En déduire l'expression de la composante tangentielle $\overrightarrow{T}$ de la réaction du rail.
3. Donner l'expression du travail de la force $\overrightarrow{T}$ entre le point A d'altitude y_0 et le point B d'altitude $y_1 = 0$ m séparés d'une distance L. Le travail est-il moteur ou résistant ?
4. Écrire le théorème de la puissance mécanique appliqué à la valise M.
5. En déduire la vitesse d'arrivée v de la valise en fonction de l'altitude y_0 du point A. Dans quel cas la vitesse de la valise en B est indépendante de l'inclinaison α ?

EXERCICE 3 Un skieur sur la neige (⋆)

On considère un skieur ramené à son centre de gravité M (placé au sol), de masse m, skiant sur une pente enneigée faisant un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement entre ses skis et la neige est de $f_s \simeq f \simeq 0,04$.

1. Quel est le référentiel d'étude ? Est-il galiléen ?
2. Faire un bilan des actions mécaniques auxquelles est soumis le skieur.
3. Écrire l'équation d'équilibre du skieur M dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$.
4. En appliquant le modèle de Coulomb au skieur, décomposer la réaction du sol $\overrightarrow{R}$ en une force normale $\overrightarrow{N}$ et une force tangentielle $\overrightarrow{T}$. Relier $\|\overrightarrow{N}\|$ et $\|\overrightarrow{T}\|$ à m.
5. Dans le cas de la limite de glissement, quelle relation existe-t-il entre $\|\overrightarrow{N}\|$ et $\|\overrightarrow{T}\|$? Pour quelle valeur de α obtient-on cette valeur ?
6. Que se passe-t-il si $\alpha = 5°$? Quelle relation existe-t-il entre $\|\overrightarrow{N}\|$ et $\|\overrightarrow{T}\|$? Où se situe la résultante $\overrightarrow{R}$ par rapport au cône de frottement ?

L'essentiel

EXERCICE 4 La Royale (⋆)

Les Coulomb *forment une famille de constructeurs navals toulonnais, qui ont joué un rôle important dans la construction navale française durant plus d'un siècle entre 1670 et la Révolution.*



Fig 3. Arsenal de Toulon dans les années 1780.

En 1781, Charles-Augustin Coulomb *propose un modèle physique du frottement à l'Académie des sciences : l'action mécanique produite par le frottement entre deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est une force $\overrightarrow{R}$ qui peut se décomposer en une composante normale à la surface de contact, notée $\overrightarrow{N}$, et une composante tangentielle à la surface de contact, notée $\overrightarrow{T}$, s'opposant au mouvement. La loi de* Coulomb *donne alors trois cas d'étude.*

1. Rappeler les trois cas d'étude en question et le lien qui existe entre $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$.

On utilise cette théorie pour déterminer le coefficient de frottement dynamique f_d à l'aide du dispositif représenté en *Figure 4*. Un chariot M de masse m est entraîné via une corde inextensible par un contrepoids de masse m' qui est lâché à une hauteur h du sol.

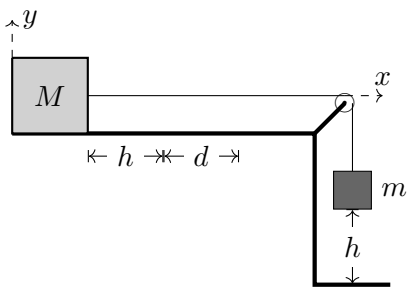


Fig 4. Dispositif expérimental.

Le chariot glisse en frottant sur son support.
Le mouvement est donc décomposé en deux phases :

1. Le contrepoids tombe et le chariot accélère
2. Le contrepoids est au sol et n'entraîne plus le chariot. Les frottements ralentissent le chariot jusqu'à arrêt complet.

On mesure ensuite la distance de freinage d du chariot.

2. Durant la première phase de l'expérience, déterminer par un raisonnement énergétique la vitesse v_0 du chariot au moment où le contrepoids touche le sol.
3. Durant la deuxième phase, donner l'expression de la distance de freinage d en fonction de v_0.
4. Montrer que $d = a \times h$ avec a un coefficient à déterminer.

Lors d'une phase de test, on obtient les valeurs suivantes :

h (en cm)	$0,0$	$2,5$	$5,0$	$7,5$	$10,0$	$15,0$
d (en cm)	$0,0$	$2,6$	$5,0$	$8,1$	$11,0$	$16,0$

avec $m \simeq 292$ g la masse du chariot et $m' \simeq 109$ g la masse du contrepoids.

5. Identifier la valeur du coefficient de frottement dynamique f_d.

EXERCICE 5 Système stick-slip (⋆)

On considère une boîte de barycentre M, de masse m, fixée à un mur par l'intermédaire d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On donne $g \simeq 9,81$ m · s^{-2} l'accélération de la pesanteur. La boîte est installée sur un tapis roulant à la vitesse v_0, le ressort étant initialement non étendu. On note f (resp. $f_s > f$) le coefficient de frottement (resp. frottement statique) boîte-tapis.

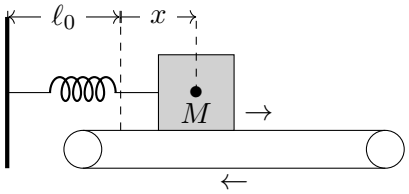


Fig 5. Système stick-slip.

1. Écrire les équations de la dynamique vérifiées par la boîte en distinguant deux phases du mouvement. Mettre ces équations sous la forme matricielle ci-dessous avec $X = \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}$ et A et B deux matrices réelles dont l'expression est à détailler.

$$\dot{X} = AX + B$$

2. Discrétiser cette équation avec la méthode d'Euler explicite et proposer une équation de récurrence sur la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $X_k = X(kT_e)$ avec T_e la période d'échantillonnage de la simulation numérique et $k \in \mathbb{N}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. Le programme informatique de la *Figure 6* permet d'afficher $x(t)$ et $y(t)$.

   a. Préciser la condition logique à remplir pour être dans le cas de l'adhérence.

   b. Compléter l'équation de récurrence sur `v[i]` dans le cas du glissement.

4. Tracer le portrait de phase de la trajectoire de la boîte.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

v0,m,g,k,f,fs=.2,1,9.81,20,.4,.6 #vitesse
du tapis [m/s] - Masse [kg] - Pesanteur
[N/kg] - Raideur [N/m] - Coefficients de
frottement
Tmax,N,Te=10,10000,Tmax/(N-1) #Durée
de la simulation [s] - Points - Période
d'échantilonnage
t=np.linspace(0,Tmax,N) #Liste du temps
x=np.zeros(N) #Liste des positions
v=np.full(N,v0) #Liste des vitesses
mu=fs #Le coefficient de frottement qui
sera actualisé suivant la situation

def Fr(x) : #Force de rappel élastique
    return k*x
def T(mu) : #Valeur maximale de la
composante tangentielle
    return mu*m*g

for i in range (1,N) :
    if À COMPLÉTER : #Adhérence
        mu,v[i],x[i]=fs,v0,x[i-1]+v[i-1]*Te
    else : #Glissement
        mu=f
        v[i]= À COMPLÉTER
        x[i]=x[i-1]+Te*v[i-1]

fig,ax = plt.subplots(1,figsize=(16,8))
ax.plot(t,x,c='r',label='$x(t)$')
plt.show()
```

Fig 6. Programme informatique.

EXERCICE 6 Embrayage (⋆⋆)

On considère un embrayage, représenté en *Figure 7*, constitué d'un disque de rayon r_2, relié à l'arbre moteur, et d'une couronne de rayon extérieur r_2 et de rayon intérieur r_1, reliée au mécanisme de transmission.

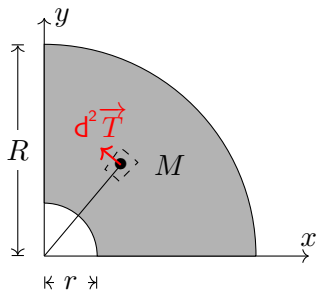


Fig 7. Quart d'embrayage.

Ce disque et cette couronne sont plaqués l'un contre l'autre avec un effort $\overrightarrow{N}$ que l'on considérera normal aux surfaces en contact. On décompose cette force $\overrightarrow{N}$ sur chaque élément de surface $\mathrm{d}^2\overrightarrow{S} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\ \overrightarrow{u_z}$ en une force élémentaire, notée $\mathrm{d}^2\overrightarrow{R} = \mathrm{d}^2\overrightarrow{N} + \mathrm{d}^2\overrightarrow{T}$, de sorte que $\overrightarrow{N} = \int_{\mathcal{S}} p\ \mathrm{d}^2\overrightarrow{S}$.

Les deux pièces sont immobiles dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$. Leur coefficient de frottement est noté f. On cherche à déterminer le couple transmissible $C\ \overrightarrow{u_z}$ en fonction de l'effort $\overrightarrow{N}$. Pour cela, on étudie le système de la couronne.

1. Donner l'expression de la surface de contact $\mathcal{S}$ en fonction de r_2 et r_1.
2. Identifier la valeur de la pression de contact p (supposée uniforme) en fonction de N, r_2 et de $r-1$.
3. Appliquer la loi de Coulomb sur le frottement et décomposer l'effort $\mathrm{d}\overrightarrow{R}$ en deux composantes. Comment les relier à la limite du glissement ?
4. Relier $\mathrm{d}^2\overrightarrow{N}$ et $\mathrm{d}^2\overrightarrow{T}$ à p et à $\mathrm{d}^2\overrightarrow{S}$.
5. Montrer que le calcul du couple transmis par les efforts de frottement s'écrit :

$$C = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} pfr^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

6. En déduire l'expression du couple C transmis en fonction de r_2, r_1, N et f.

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Frottement exponentiel (⋆⋆)

On considère le montage de la *Figure 8* :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

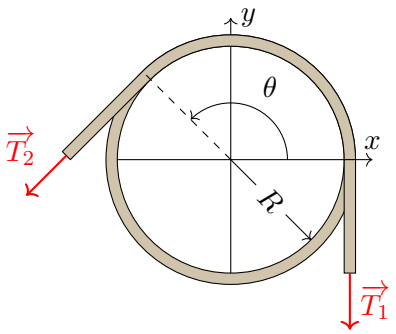


Fig 8. Enroulement de corde autour d'un treuil.

Une corde peu épaisse est enroulée sur un treuil de rayon R. On note α l'angle qui est fait dans l'enroulement total (c'est-à-dire que pour un enroulement de deux tours $\alpha = 4\pi$). La corde frotte sur le treuil et on note f le coefficient de frottement statique correspondant.

Ce frottement permet à l'opérateur d'appliquer une force $\overrightarrow{T_2}$ plus petite que la tension $\overrightarrow{T_1}$ à l'autre bout de la corde pour maintenir l'ensemble statique.

1. Faire un bilan des forces auxquelles est soumis un morceau de corde compris entre les angles θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$.
2. En déduire la relation qui existe entre la tension de la corde $T(\theta)$ en θ et $T(\theta + \mathrm{d}\theta)$ en $\theta + \mathrm{d}\theta$.
3. Montrer que T_1 et T_2 sont reliées entre-elles par une loi exponentielle.

EXERCICE 8 Expérience de Timoshenko (⋆⋆)

Deux cylindres identiques, représentés en *Figure 9*, horizontaux et parallèles tournent autour de leurs axes avec des vitesses angulaires ω opposées.

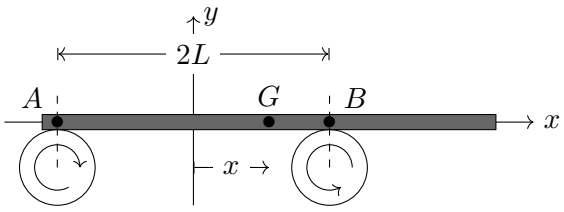


Fig 9. Tribomètre dynamique.

La plaque rectangulaire, de masse m et d'épaisseur négligeable, repose sur des rouleaux. La distance entre les génératrices de contact (A et B) est $2L$. L'origine O est au milieu de AB, et $x(t)$ représente la distance entre le centre de gravité G de la plaque et O. Les coefficients de frottement f_1 et f_2 entre la plaque et les rouleaux sont constants, indépendants de la vitesse. Si $x(0)$ est non nul au moment où la plaque est posée, celle-ci oscille.

1. Déterminer les efforts normaux de liaison N_1 et N_2 entre la plaque et les cylindres aux points A et B.
2. En déduire les efforts tangentiels T_1 et T_2 respectivement en A et B liés au frottement de la plaque sur les cylindres.
3. Écrire l'équation différentielle du mouvement. À quelle condition a-t-on l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ?
4. Identifier la période des oscillations en fonction du coefficient de frottement f entre la plaque et les cylindres.

Viser l'X

EXERCICE 9 Barre qui tombe (⋆⋆⋆)

On considère une barre homogène, de masse m et de longueur ℓ posée verticalement sur une table.

Données :

- Moment d'inertie d'une tige en son extrémité :

$$J = \frac{m\ell^2}{3}$$

- Coefficient de frottement table-barre : f.

1. Lorsque la barre tombe et sans tenir compte des frottements, à partir de quel angle θ le contact est-il rompu ?
2. Qu'en est-il de la première situation en présence de frottements ?

EXERCICE 10 Corde sur un support (⋆⋆)

On considère une corde de masse linéique λ que l'on pose sur un support fixe comme sur la *Figure 10* (avec une symétrie gauche-droite).

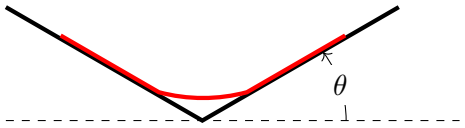


Fig 10. Dispositif expérimental.

Pour que la corde puisse rester dans une configuration comme celle-ci, cela implique qu'il y a un frottement entre la corde et le support. On prendra pour coefficient de frottement $f \simeq 1,0$.

1. Quelle est la proportion maximale de corde ne touchant pas le support ?

EXERCICE 11 Avalanche (⋆⋆⋆)

1. Modéliser une avalanche en supposant la masse de neige en mouvement constante.
2. Proposer un modèle qui prend compte de l'accumulation de neige pendant l'avalanche.

Ne pas tenir compte des effets granulaires ou d'une modélisation en mécanique des fluides.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/