10 - Changement de référentiel

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Bifurcation (⋆⋆)

Une bille M de rayon r et de masse m circule sans frotter dans une rainure tracée à l'intérieur d'un cerceau de rayon R, représenté sur la *Figure 1*. On met en rotation le cerceau autour de l'axe vertical $(O, \overrightarrow{u_z})$.

On considère que le référentiel dans lequel est posé le dispositif est le référentiel terrestre, supposé galiléen pour le temps de l'expérience.

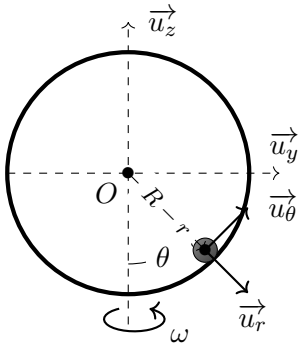


Fig 1. Cerceau en rotation.

1. Dans le référentiel tournant, lister les forces auxquelles est soumise la bille M. Calculer le travail élémentaire de ces forces.
2. En identifiant l'expression de l'énergie potentielle de la bille, déterminer sa ou ses position(s) d'équilibre en fonction de la vitesse de rotation ω. Identifier une vitesse de rotation critique ω_c où la bille change de comportement.
3. Tracer les positions d'équilibre de la bille en fonction de ω et identifier s'il s'agit de positions d'équilibre stable ou instable.
4. Pourquoi appelle-t-on ce dispositif un « bifurcateur » ?

EXERCICE 2 Équilibre gravitationnel (⋆⋆)

On considère une corde de section s très petite, de masse volumique μ et de longueur ℓ. Cette corde est droite (radiale) et se trouve dans le plan équatorial de la Terre.

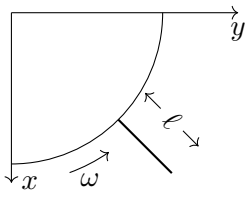


Fig 2. Plan équatorial de la Terre.

Une de ses extrémités se trouve au niveau de la surface de la Terre, sans la toucher.

1. Décrire le référentiel d'étude et définir le système étudié.
2. Faire un bilan des forces auxquelles est soumis le système.
3. En déduire l'équation d'équilibre à laquelle est soumis le système.
4. Énoncer les conditions aux limites du problème.
5. En déduire la longueur ℓ de la corde pour que celle-ci soit en équilibre par rapport à la Terre.

Données :

masse de la Terre : $M_T \simeq 6,00 \times 10^{24}$ kg ;
constante universelle de gravitation :
$\mathcal{G} \simeq 6,67 \times 10^{-11}$ m³ · kg⁻¹ · s⁻² ;
rayon de la Terre : $R_T \simeq 6380$ km ;
période de révolution de la Terre : $T \simeq 23$ h 56 min.

L'essentiel

EXERCICE 3 Effet de marées (⋆⋆)

On considère que la Terre, de centre T et de masse M_T est à une distance d d'un autre astre A de masse M_A tel que $\overrightarrow{TA} = d\,\overrightarrow{u_y}$, représentés en *Figure 3*. On étudie le mouvement d'un point M de masse m évoluant à proximité de la surface de la Terre tel que $\overrightarrow{TM} = r\,\overrightarrow{u_r}$. Pour cela, on se place dans deux référentiels différents, le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ et le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ (dans lequel le barycentre G des deux astres est fixe). L'ensemble des deux astres est supposé isolé du reste de l'univers.

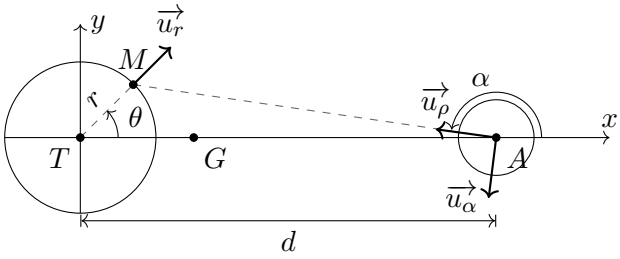


Fig 3. Système Terre-Astre.

1. Justifier le fait que le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ soit galiléen.
2. Peut-on considérer le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ comme galiléen ? Pourquoi ?
3. Lister les efforts auxquels est soumis le point M en prenant $\mathcal{R}_g$ comme référentiel d'étude.
4. Exprimer l'équation du mouvement du solide M à proximité de la surface de la Terre.

5. En se plaçant dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, identifier l'expression de l'accélération $\overrightarrow{a_{T,\mathcal{R}^*}}$ en fonction des champs gravitationnels $\mathcal{G}_A(M)$ et $\mathcal{G}_A(T)$ de l'astre A respectivement en M et T. On remarquera que $m \ll M_A, M_T$.
6. Montrer que l'accélération subie par le point M dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ à la surface de la Terre peut s'écrire :
$$\overrightarrow{a}_{M,\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\mathcal{G}_T}(M) + \frac{M_T}{m+M_T}\overrightarrow{\delta_A}(M)$$
avec $\overrightarrow{\delta_A}(M)$ le terme de marée à identifier.
7. En considérant $r \ll d$ donner à l'ordre 1 en r l'expression de $\overrightarrow{\delta_A}(M)$ en fonction de la constante de gravitation $\mathcal{G}$, m_A, r, d et $\cos(\theta)$.
8. Représenter ce champ à la surface de la Terre sur un schéma.

EXERCICE 4 Déviation vers l'Est (⋆⋆)

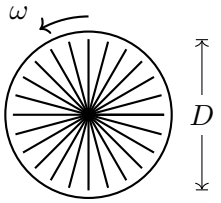
On considère une balle M de masse m que l'on lâche sans vitesse initiale d'une altitude $z = 0$ m. On cherche à décrire son mouvement dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ formé de la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, chaque vecteur pointant vers un point cardinal :

- $\overrightarrow{u_x}$ pointe vers le Sud
- $\overrightarrow{u_y}$ pointe vers l'Est
- $\overrightarrow{u_z}$ pointe vers le haut

1. Combien de tours fait la Terre sur elle-même lors d'une année de N jours ?
2. Identifier la différence entre un jour sidéral et un jour solaire. En déduire la vitesse de rotation ω de la Terre sur elle-même ?
3. Le référentiel $\mathcal{R}$ est-il rigoureusement galiléen ? Pourquoi ? Dans quelle mesure pourrait-on le considérer comme galiléen ?
4. Identifier les forces auxquelles est soumise la balle M dans le référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen.
5. Écrire l'équation différentielle régissant le mouvement de la balle M.
6. Après intégration, en déduire que la trajectoire de la balle peut s'écrire $\overrightarrow{OM}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\ \overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{D}(t)$ en précisant la signification de chaque terme ainsi que l'expression de $\overrightarrow{D}(t)$.
7. En employant la méthode des perturbations, préciser la valeur à l'ordre 1 en ω de $\overrightarrow{D}(t)$ et identifier vers quel point cardinal est déviée la balle.
8. Faire de même à l'ordre 2.

EXERCICE 5 Dimensionnement de pâles (⋆⋆)

Les pâles d'un rotor de turboréacteur sont assimilées à des poutres minces de section S et de masse volumique μ uniforme. Lorsque ces pâles tournent avec le rotor à la vitesse angulaire ω les efforts centrifuges liés à la force d'inertie d'entraînement allongent la longueur des pâles, de longueur initiale $\frac{D}{2}$.



Un essai de traction de l'aluminium 6061-T651 (alliage), présenté en *Figure 4*, permet de déterminer les caractéristiques de ce matériau utilisé pour la fabrication des pâles.

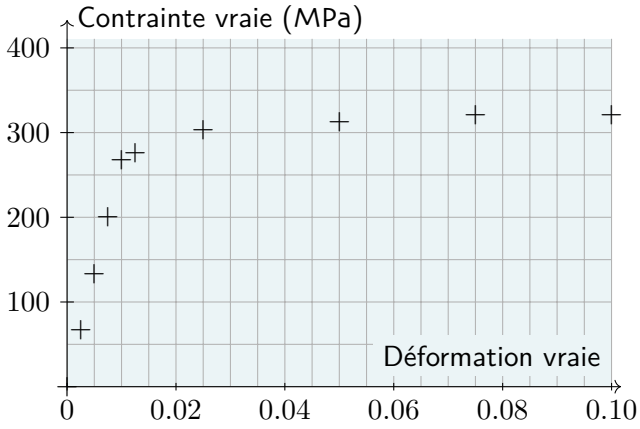


Fig 4. Essai de traction de l'aluminium 6061-T651.

La contrainte vraie correspond à la force F par unité de surface S dans l'éprouvette de traction qui a servi à l'essai. Lorsque l'éprouvette s'allonge de u pour une longueur de matériaux r, la déformation vraie correspond à $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$.

1. Proposer une représentation schématique d'une pâle de rotor.
2. En négligeant les effets de la gravité au regard des forces d'inertie, préciser l'évolution $F(r)$ de la force radiale de traction dans la pâle en fonction de μ, S, ω, D et r (la position radiale dans la pâle).
3. Identifier la contrainte maximale R_m obtenue avec l'essai de traction et comparer cette valeur avec celle obtenue avec la valeur maximale F_{max} de F lorsque $\omega \simeq 300$ rad $\cdot$ s^{-1}, $D \simeq 2,5$ m et $\mu \simeq 2700$ kg $\cdot$ m^{-3}.

Lors d'un dimensionnement, on cherche à ne pas dépasser la limite d'élasticité R_e pour laquelle la loi de HOOKE est vérifiée :
$$\frac{F}{S} = E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$
avec $E \simeq 70$ GPa le module d'YOUNG de l'aluminium.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

La contrainte et la déformation sont alors reliées par une relation de proportionnalité.

4. Préciser le coefficient de sécurité obtenu $s = \frac{R_e S}{F_{\max}}$ avec les pâles du rotor.
5. Estimer l'allongement $u\left(\frac{D}{2}\right)$ en bout de pâles dans les conditions de rotation de la *question* 3.
6. En déduire le jeu j nécessaire entre le bout des pâles et le carter si les pâles utilisées sont de longueur initiale (sans rotation) $\frac{D}{2}$.

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Pendule de Foucault (⋆⋆⋆)

En 1851, le physicien français Foucault *a observé le mouvement d'un pendule supposé simple, destiné à prouver la rotation de la Terre.* Foucault *a étudié le phénomène tout d'abord avec une masse de* 5 kg *suspendue a un fil de* 2 m *de long, puis à l'Observatoire de Paris avec un pendule de* 11 m *et enfin de façon spectaculaire au Panthéon à Paris (latitude* $\lambda \simeq 48°$*) avec une masse de* 28 kg *suspendue à la coupole par un fil d'acier de* 1,4 mm *de diamètre et de longueur* $\ell = 67$ m.

Un point A de masse m est suspendu par l'intermédiaire d'un fil sans masse de longueur ℓ à un point H fixe par rapport au sol. Le dispositif est représenté en *Figure 5*. On reconnaît la description d'un pendule simple (de pulsation ω_0) : observé dans de bonnes conditions, ce pendule peut être qualifié de pendule de Foucault.

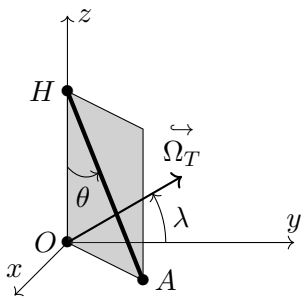


Fig 5. Pendule de Foucault.

Soit O le point d'équilibre du pendule. Pour des oscillations de faible amplitude, le mouvement est quasi plan et s'effectue pratiquement dans le plan horizontal xOy.

1. Montrer que ceci implique que la tension T du fil est confondue avec le poids de la masse m. On écarte le pendule de cette position d'équilibre O en un point de coordonnées x et y (très inférieures à 1). Montrer que le pendule sera soumis à la tension du fil d'expression : $\vec{T} = -T\frac{\vec{HA}}{\ell}$
2. Écrire les équations du mouvement dans le plan, tenant compte du fait que le référentiel terrestre est non galiléen. On pose Ω_T la vitesse de rotation de la terre autour de son axe. Montrer que les équations du mouvement sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -\frac{g}{\ell}x(t) + 2\Omega_T \sin(\lambda)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -\frac{g}{\ell}y(t) - 2\Omega_T \sin(\lambda)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \end{cases}$$

3. Intégrer les équations du mouvement en posant $\rho = x + iy$, ce qui revient à repérer le point A du plan par le nombre complexe ρ. Montrer que l'on arrive à une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
4. Trouver les solutions ρ de l'équation précédente en fonction de ω_0, Ω_T, λ et des conditions initiales $x(0) = x_m$, $y(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
5. En supposant que la Terre ne tourne pas ($\Omega_T = 0$), montrer que le point A décrit une ellipse avec une période $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Montrer que si la Terre tourne, l'ellipse-trajectoire du point A tourne autour de l'axe vertical Oz par rapport aux axes fixés au sol avec une vitesse angulaire $\Omega = -\Omega_T \sin(\lambda)$. Que se passe-t-il aux pôles et à l'équateur ?
6. Avec les données de l'expérience du Panthéon à Paris, calculer T_0 et Ω. En déduire la période de rotation complète de l'ellipse.

EXERCICE 7 Limite de Roche (⋆⋆⋆)

On cherche à déterminer la distance à partir de laquelle une comète, en s'approchant de Jupiter (de masse M_J), se séparerait sous l'effet des forces de marée. Pour cela, on fait les hypothèses suivantes :

- Le centre d'inertie G de la comète (de masse volumique μ_c) est en orbite circulaire de rayon d autour de Jupiter, avec une période T.
- La comète est formée de deux sphères identiques de masse m et de rayon r, homogènes, disposées comme sur la *Figure 6*.
- Dans les calculs d'attraction gravitationnelle, on suppose que la masse m est concentrée au centre de chaque sphère.

Les deux sphères ne sont liées que par leur attraction gravitationnelle mutuelle. On suppose que leur disposition reste fixe, avec leurs centres toujours alignés avec le centre O de Jupiter.

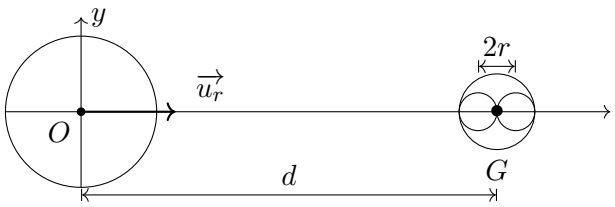


Fig 6. Jupiter et comète.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

PARTIE A : Force des marées :

1. Déterminer la vitesse v du centre d'inertie G de la comète en fonction du rayon de la trajectoire et des données. Donner l'expression de ω^2 ($\omega = \frac{2\pi}{T}$). Donner une expression approchée au premier ordre en $\frac{r}{d}$, à utiliser par la suite.
2. Faire un bilan des forces sur chaque sphère de la comète dans le cas d'un contact maintenu, sans frottement.
3. **a.** En appliquant le théorème de la résultante cinétique, en déduire deux équations.
   b. Quelle est la condition pour que le contact entre les deux solides soit rompu ?
   c. En déduire que le contact est rompu lorsque d devient inférieur à d_ℓ, la limite de ROCHE. Exprimer et calculer $\frac{d_\ell}{R_J}$ (on donne $\mu_c \simeq 103 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).
   d. Exprimer le module f de l'attraction mutuelle des deux solides en fonction de d_ℓ, $\mathcal{G}$, M_J et m.
   e. Pourquoi parle-t-on de forces de marée ?

PARTIE B : Forces de cohésion :

Les observations montrent que la comète s'est fragmentée lorsqu'elle a atteint une distance $d_0 \simeq 1,5 \times R_J$ de Jupiter. Cela peut s'expliquer en supposant que, en plus de leur attraction mutuelle, les deux sphères sont liées par des forces de cohésion.

4. Soit F_{co} le module de la force de cohésion entre les deux sphères, et f celui de leur attraction mutuelle. Montrer que :

$$F_{co} = \left(\left(\frac{d_\ell}{d_0}\right)^3 - 1\right) f$$

5. Calculer numériquement le rapport $\frac{F_{co}}{f}$.

Les forces de cohésion entre deux morceaux d'un solide sont de courte portée et proportionnelles à la surface de contact. Pour la glace, on peut estimer la force de cohésion p_0 par unité de surface en utilisant l'observation suivante : une stalactite de glace dépasse rarement $3,0$ m avant de s'effondrer sous son propre poids.

6. En considérant une stalactite cylindrique, en déduire la valeur de p_0. On donne $g \simeq 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et on assimile la masse volumique de la glace à celle de la comète.
7. Pour calculer les forces de cohésion de la comète, on suppose que les deux parties de masse m sont deux demi-sphères de rayon r' accolées.
   a. Exprimer r' en fonction de r.
   b. Estimer la dimension r des morceaux fragmentés. On conservera le modèle des deux sphères pour l'attraction mutuelle et celui des demi-sphères pour la cohésion. Exprimer r en fonction de p_0, μ_c, G et $\alpha = \left(\frac{d_\ell}{d}\right)^3 - 1$. Calculer r numériquement.

Données :

masse de Jupiter : $M_J \simeq 1,898 \times 10^{27}$ kg ;
rayon de Jupiter : $R_J \simeq 69\,911$ km.

Viser l'X

EXERCICE 8 Face cachée lunaire (⋆⋆⋆)

1. On voit toujours la même face de la Lune. Pourquoi ?

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/