11 - Ondes mécaniques et électriques

Outil mathématique : Fonctions à variables séparables

Lorsque la solution la solution $E(x,t)$ d'une équation de propagation de d'Alembert est cherchée sous la forme d'une fonction à variables séparables, $E(x,t) = f(x) \times g(t)$, l'équation obtenue est :

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2} f(x)\ddot{g}(t) = 0 \tag{1}$$

Deux fonctions à variables séparables sont égales si elles le sont avec une constante commune. L'équation différentielle aux dérivées partielles est donc réécrite sous la forme de deux équations différentielles ordinaires :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = \text{cte} \tag{2}$$

Ces deux équations peuvent être résolues de concert.

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Chaîne infinie d'oscillateurs (⋆)

On étudie une succession de masses m reliées entre elles par des ressorts de raideur K et de longueur à vide a, représentés en *Figure 1*. Au repos, la masse n est à l'abscisse $x_n = n \times a$. Au passage de l'onde, la masse se déplace selon l'axe Ox. On note $\xi_n(t) = \xi(x_n,t)$ le déplacement dû à la perturbation par rapport à la position d'équilibre. On considère comme seules interactions ayant une composante non nulle selon Ox les interactions élastiques dues aux ressorts.

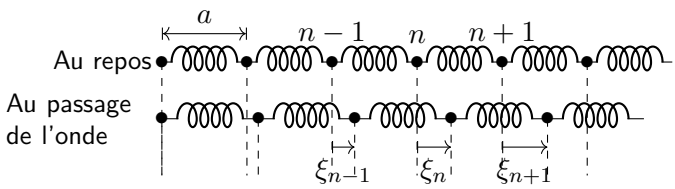


Fig 1. Chaîne de ressorts.

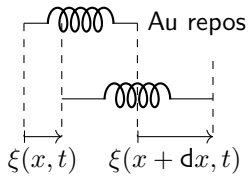
1. L'onde est-elle longitudinale ou transversale ?
2. On étudie la masse m. Par un bilan dynamique, relier $\xi_n(t)$, $\xi_{n-1}(t)$, $\xi_{n+1}(t)$ et $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_n,t)$.
3. Exprimer ξ_{n+1} et ξ_{n-1} en fonction de ξ_n et de a.

On considère la distance a très petite devant les grandeurs caractéristiques du phénomène ondulatoire (longueur d'onde...).

4. Par un développement limité au second ordre, montrer que l'équation vérifiée par $\xi(x_n,t)$ est une équation de d'Alembert.
5. Pour $m \simeq 50$ g, $K \simeq 10$ N · m^{-1} et $a \simeq 2$ cm, calculer la célérité de l'onde se propageant le long de cette chaîne de ressort.
6. Quelle sera la condition sur la fréquence de l'onde afin que l'hypothèse du système infinitésimal soit vérifiée ?

EXERCICE 2 Ondes dans un ressort (⋆)

Un ressort à spires non jointives de longueur L et de masse linéique μ a une raideur K. Le ressort est placé sur un axe horizontal. Le déplacement des spires se fait sans frottement.



On étudie une longueur élémentaire $\mathrm{d}x$ du ressort au repos qui, au passage d'une onde de déformation, voit ses extrémités se déplacer de $\xi(x,t)$ et $\xi(x+\mathrm{d}x,t)$.

1. On considère deux ressorts associés en série de raideur k. L'ensemble est considéré comme un ressort unique de raideur K.
   - **a.** Déterminer la relation entre k et K.
   - **b.** En déduire que l'expression de la raideur $k\mathrm{d}x$ d'une longueur $\mathrm{d}x$ du ressort est $k\mathrm{d}x = K \times L$.
2. Exprimer l'allongement de cet élément de ressort en fonction de $\frac{\partial \xi}{\partial x}$.
3. On étudie l'élément $\mathrm{d}x$ de ressort situé entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$. Exprimer les forces de rappel s'exerçant aux extrémités de cet élément en fonction de $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{(x)}$, K et L.
4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\xi(x,t)$ ainsi que la vitesse de propagation des ondes dans le ressort.
5. On considère le ressort fixé en $x = 0$ et relié à une masse libre de se déplacer en $x = L$. Montrer qu'il existe des solutions d'ondes stationnaires du type $\xi(x,t) = g(x) \times \sin(\omega t)$. Déterminer $g(x)$ puis une équation vérifiée par ω.

6. On fixe le ressort en $x = 0$. En $x = L$, le ressort est lié à une masselotte M de masse m. Déterminer la relation entre K et ω pour les modes propres de vibration.

Données : $L \simeq 1$ m ; $m \simeq 150$ g ; $K \simeq 3,7$ N · m^{-1}.

EXERCICE 3 Échelle de Perroquet (⋆⋆)

On considère l'échelle de PERROQUET représentée en *Figure 2*. N baguettes de métal, de moment d'inertie J sur l'axe $(O, \vec{u_z})$ sont reliées entre elles par un ressort de torsion de raideur $+c$. On considère une baguette, indicée n, à la position $z_n = n \times a$ faisant un angle $\theta_n(t) = \theta(na, t)$ par rapport à sa position au repos. On se placera dans le cas de déformation telle que le développement de cette fonction, dans le passage de l'abscisse na à l'abscisse $na \pm a$, peut être limité au second ordre relativement au pas a.

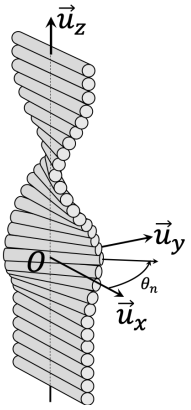


Fig 2. Échelle de PERROQUET.

1. Établir alors que, dans cette limite du milieu continu, la fonction $\theta(z,t)$ vérifie l'*équation 3*.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(z,t) - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}(z,t) = 0 \qquad (3)$$

avec c_0 que l'on exprimera et dont on donnera une interprétation physique.

2. Pour un pas a fixé, préciser à quelle condition le passage à la limite du milieu continu demeure valide.
3. Nous posons $\mu \triangleq \frac{J}{a}$ et $\kappa \triangleq ca$. Exprimer alors c_0 en fonction de κ et μ.
4. Justifier que c_0 reste inchangée si l'on modifie a tout en maintenant le rapport $\frac{\kappa}{\mu}$ fixé.
5. On cherche une solution de la forme :

$$\underline{\theta}(z,\omega) = \theta_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$$

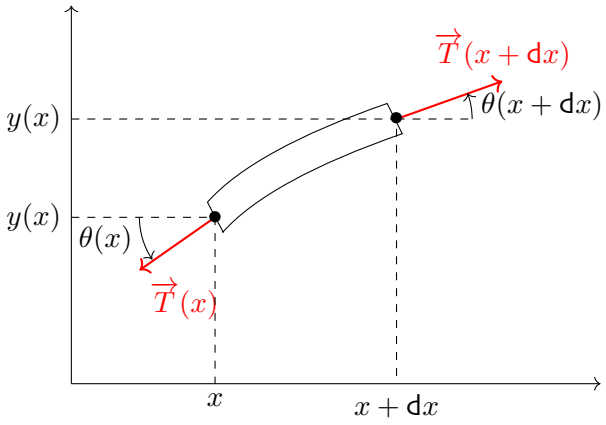
Donner la relation de dispersion impliquant $\underline{k}$.

6. Exprimer les vitesse de phase v_φ et vitesse de groupe v_g en fonction de c_0. Expliquer leur signification.

L'essentiel

EXERCICE 4 La corde vibrante (⋆⋆)

On considère une corde de masse linéique $\mu = \frac{m}{L}$ avec m sa masse totale et L sa longueur totale. La corde est supposée sans rigidité.

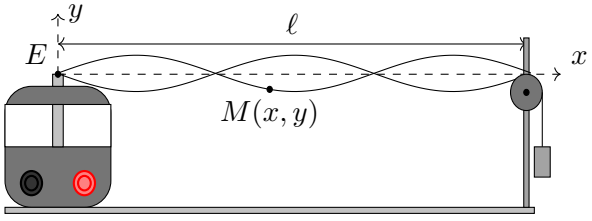


On suppose uniquement de petites déformations de telle sorte que $\left|\frac{\partial y}{\partial x}(x)\right| \simeq \theta(x) \ll 1$ rad. On néglige l'accélération de la pesanteur devant $|\ddot{y}|$.

PARTIE A : Les modes propres :

1. On suppose un élément de corde de longueur $\mathrm{d}\ell$ situé entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ de sorte que $\mathrm{d}\ell \simeq \mathrm{d}x$. Exprimer $\vec{T}(x)$ et $\vec{T}(x+\mathrm{d}x)$ dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$ en fonction de $\theta(x)$.
2. Faire le bilan des forces auxquelles est soumis l'élément de corde de longueur $\mathrm{d}x$ (au premier ordre en $\mathrm{d}x$). En déduire l'équation différentielle vérifiée par $y(x,t)$ et montrer que $T(x+\mathrm{d}x) \simeq T(x) \triangleq T_0$.
3. En notant c la vitesse de propagation des ondes dans la corde de guitare tendue, exprimer c en fonction de T_0 et de μ. Calculer cette valeur pour $T_0 \simeq 103,0$ N et $\mu \simeq 3,0 \times 10^{-3}$ kg · m^{-1}.
4. En cherchant les solutions de la forme $y(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx)$, établir la relation de dispersion entre k, ω et c. Comment nomme-t-on k et $\vec{k} = k\,\vec{u_x}$?
5. Exprimer la période spatiale λ et temporelle T de l'onde en fonction de ω et k.

On utilise la corde décrite précédemment dans le montage de la corde de MELDE. La corde est tendue avec une tension T_0 entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$.



On cherche les solutions de $y(x,t)$ sous la forme d'ondes stationnaires $y(x,t) = f(x) \times g(t)$. La corde est fixée à ses extrémités, soit $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

6. Établir les équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

7. En déduire l'expression analytique de $y(x,t)$.
8. Exprimer les fréquences f_n des modes résonnants introduits par l'existence d'une condition aux limites fixes ($y(L)=0$). Définir les termes de nœud et de ventre.

PARTIE B : Étude énergétique :

On étudie un morceau de corde situé entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$.

9. Exprimer la densité linéique d'énergie cinétique e_c en fonction de μ et de $\frac{\partial y}{\partial t}$.
10. On note $v = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ la vitesse de déplacement de la corde à l'abscisse x au temps t et $T_y(x) = (T \times \sin(\theta))(x)$. Montrer que la puissance $\mathcal{P}^{\,e}$ des efforts extérieurs en x et en $x+\mathrm{d}x$ qui s'appliquent à l'élément infinitésimal de corde s'écrit :

$$\mathcal{P}^{\,e} = \frac{\partial (T_y \times v)}{\partial x}\mathrm{d}x$$

11. En écrivant le théorème de la puissance cinétique, montrer que la puissance $\mathcal{P}^{\,i}$ des efforts intérieurs s'écrit :

$$\mathcal{P}^{\,i} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2T_0}T_y^2\right)\mathrm{d}x = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)\mathrm{d}x$$

12. En déduire l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle e_p de la corde.
On considère la corde dans le mode propre n tel que :

$$y_n(x,t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}+\varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

13. Montrer que l'énergie mécanique du mode propre n a pour expression :

$$\mathcal{E}_n = n^2 c_n^2 \frac{\pi^2}{4L}T_0$$

EXERCICE 5 Équation des télégraphistes (⋆)

On modélise une longueur $\mathrm{d}x$ d'une ligne électrique coaxiale par le schéma de la *Figure 3*. On considère l'élément de la ligne étudiée dans l'ARQS

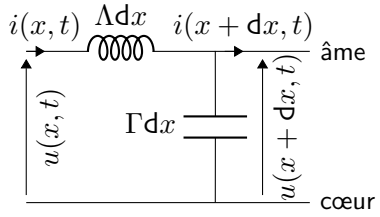


Fig 3. Câble coaxial infinitésimal.

1. Établir les équations aux dérivées partielles reliant $u(x,t)$ et $i(x,t)$.
2. En déduire les équations vérifiées par $i(x,t)$ d'une part et $u(x,t)$ d'autre part.
3. On considère une solution progressive harmonique selon les x croissants $\underline{u}(k,\omega) = U_0 \times e^{j(\omega t - kx)}$ avec $u(x,t) = \mathrm{Re}\left(\underline{u}(k,\omega)\right)$. Déterminer l'expression de $i(x,t)$.
4. La ligne s'étend de $x=0$ à $x=\ell$. On referme en $x=\ell$ la ligne grâce à une résistance R. Déterminer l'expression de R permettant l'existence dans la ligne de la solution proposée à la question précédente.

EXERCICE 6 Chaîne de pendules (⋆⋆)

Chaque pendule est constitué d'une barre homogène de masse m et de longueur ℓ et de moment d'inertie, par rapport à l'axe Ox, $J_\Delta = m\frac{\ell^2}{3}$. Il oscille dans un plan $O_n yz$ par rapport à l'axe horizontal Ox. O_n est le point d'accroche du pendule n sur l'axe, d'abscisse $n \times a$. On repère par θ_n la position angulaire du pendule n par rapport à sa position d'équilibre. Les liaisons entre les pendules et l'axe sont supposées de type pivots parfaites. Chaque pendule est relié à ses voisins par un fil de torsion de constante K, confondu avec Ox. Le couple exercé par un fil de torsion tend à ramener le fil vers une torsion nulle. Le couple est du type $\Gamma = \pm K\Delta\theta$ avec $\Delta\theta$ l'angle de torsion du fil. On néglige tout frottement avec l'air.

1. Déterminer l'équation reliant θ_{n-1}, θ_n et θ_{n+1} et $\frac{\partial^2\theta_n}{\partial t^2}$.
2. En se plaçant dans l'approximation des milieux continus et le cas d'angles faibles, vérifier que $\theta(x,t)$ est solution de l'*équation 4*.

$$\frac{m\ell^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(x,t) + \frac{mg\ell}{2}\theta(x,t) - Ka^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad (4)$$

3. Proposer une forme générale pour la solution $\theta(x,t)$ en considérant une progression éventuelle de l'onde selon $\overrightarrow{u_x}$.
4. Montrer que la relation de dispersion s'écrit $k^2 = \frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}$, exprimer c et ω_c.
5. On considère $\omega > \omega_c$. Qualifier le milieu. Donner les vitesses de groupe et de phase. Commenter.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Corde vibrante avec déperdition (⋆⋆)

On se place dans les hypothèses habituelles d'étude d'une corde tendue avec une tension T, de masse linéique μ. On considère la longueur ℓ de la corde très grande de sorte que l'on puisse considérer la présence d'une onde progressive du type $\underline{y}(x,t) = Y_0 e^{j(\underline{k}x-\omega t)}$. On tient compte d'une force linéique de frottement visqueux $\overrightarrow{f_v} = -\lambda \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\ \overrightarrow{u_y}$.

1. Préciser l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x,t)$. Quel nom lui donne-t-on ? dans le cas où $\lambda = 0$, vérifier que l'on retrouve une équation bien connue.
2. Déterminer la relation de dispersion.
3. On considère le milieu faiblement absorbant. En déduire alors une expression de $y(x,t)$.
4. On crée une impulsion en $x = 0$ à $t = 0$, décrite par un paquet d'onde dont le spectre est centré sur $\omega \simeq 150$ rad $\cdot$ s^{-1}. Au bout de quelle durée Δt observera-t-on cette impulsion en $x = \ell$?
5. Faire l'application numérique avec $\ell \simeq 1{,}00$ m, $T \simeq 250$ N, $\mu \simeq 1$ g $\cdot$ m^{-1}, $\lambda \simeq 0{,}05$ SI.

EXERCICE 8 Télégraphe avec dispersion (⋆⋆⋆)

On modélise une longueur élémentaire dx d'un câble coaxial comme indiqué en *Figure 4*. r représente la résistance linéique de la ligne, g son admittance linéique de fuite.

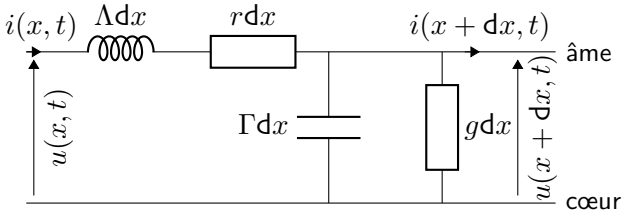


Fig 4. Schéma électrocinétique du câble coaxial.

1. Établir les équations de couplage liant $u(x,t)$ et $i(x,t)$
2. En déduire l'équation de propagation dans la ligne.

On pose $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$; $g\Lambda + r\Gamma = 2\frac{K}{c}$; $rg = \frac{\Omega^2}{c^2}$; $\underline{Z_c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ et $R = \sqrt{\frac{r}{g}}$.

3. Déterminer la relation de dispersion en posant $k = k' - j \times k''$ avec $j^2 = -1$. Donner la signification physique de k' et k''.
4. On envoie au travers de ce câble des informations binaires avec un débit de 3 Mbits $\cdot$ s^{-1}. Expliquer pourquoi l'utilisation d'un tel câble sera limitée en longueur.

EXERCICE 9 Soudure sur câble électrique (⋆⋆⋆)

On modélise une longueur dx d'un câble coaxial par le schéma de *Figure 5*.

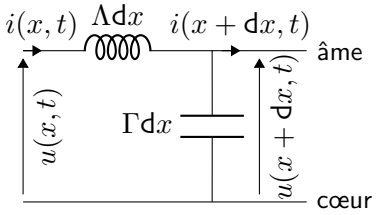


Fig 5. Câble électrique.

On considère l'élément de la ligne étudiée dans l'ARQS On suppose que le câble électrique très long s'étend de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

1. Retrouver l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$.

2. Une OPPH se propage selon les x croissants. On note $\underline{u_i}$ et $\underline{i_i}$ les grandeurs électriques associées. Proposer une expression pour $\underline{u_i}$ et exprimer l'impédance caractéristique du câble : $\underline{Z_c} = \frac{\underline{u_i}}{\underline{i_i}}$ en fonction de Γ et Λ. On peut montrer que pour une onde réfléchie, on a la relation $\underline{u_r} = -\underline{Z_c} \times \underline{i_r}$.
3. La ligne étant détériorée en $x = 0$, un technicien ressoude les lignes du câble, ce qui peut être modélisé par une résistance R entre les deux lignes de ce câble en $x = 0$. Proposer alors une combinaison d'OPPH permettant de caractériser $u(x < 0, t)$ puis $u(x > 0, t)$.

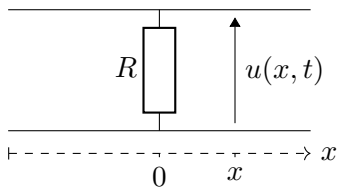


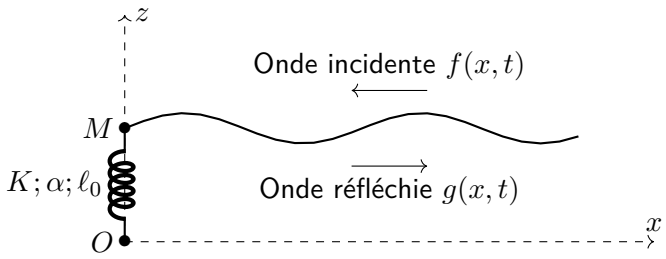
Fig 6. Soudure de résistance R.

4. Définir puis exprimer les coefficients de réflexion et transmission en amplitude r et t en fonction de R et $\underline{Z_c}$.
5. Quel coefficient pourriez-vous étudier afin de caractériser l'effet de la réparation sur la qualité du câble ? Exprimer ce coefficient.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 10 Corde amortie (⋆⋆)

On considère une corde horizontale de masse linéique μ et de longueur ℓ accrochée à un support M, de masse m avec une tension T. Le point M est relié à un bâti par un ressort visco-élastique de constante de raideur K, de longueur à vide ℓ_0, et de coefficient de frottement visqueux α.



1. Identifier la célérité c des ondes se propageant dans la corde par analyse dimensionnelle.
2. On note k le vecteur d'onde incident de l'OPPH $f(x,t)$. Identifier le facteur de réflexion en amplitude r au niveau du point M.

Viser l'X

EXERCICE 11 Corde secouée (⋆⋆⋆)

Une corde inextensible de masse linéique μ et de longueur L est suspendue par l'une de ses extrémités et libre à l'autre bout. Elle pend verticalement (axe (z)). On s'intéresse aux petits mouvements suivant la perpendiculaire à cet axe lorsque l'on secoue (faiblement) la corde suivant un axe horizontal (x).

1. Dans ces conditions, quelle est la plus petite fréquence pour une onde stationnaire qui peut exister sur cette corde ?

Données : On pourra étudier un développement en série entière des solutions stationnaires de l'équation obtenue pour des petites oscillations suivant (x) de la corde, écrite avec des variables adimensionnées.

Si besoin, on admettra que l'équation :

$$1 - x + x^2/2!^2 - x^3/3!^2 + x^4/4!^2 - x^5/5!^2 + \ldots = 0$$

a comme plus petite racine : $x_{\text{min}} \simeq 3/2$.

EXERCICE 12 Vibrations d'un réseau 2D (⋆⋆⋆)

On considère un réseau plan de paramètre de maille a qui contient des atomes identiques de masse m. On note C la raideur équivalente entre deux atomes voisins contraints de se déplacer perpendiculairement au plan du réseau dans la direction $\overrightarrow{u_z}$.

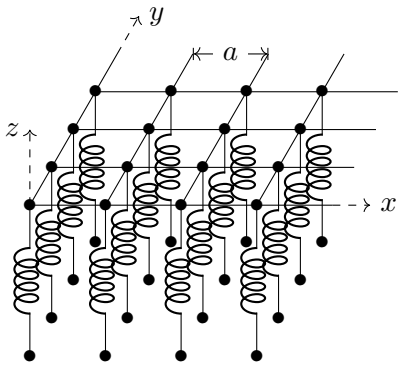


Fig 7. Réseau cristallin plan.

1. Déterminer la relation de dispersion pour ce problème.
2. Tracer des courbes iso-fréquence.

EXERCICE 13 Corde pesante (⋆⋆⋆)

On considère une corde pesante de masse m et de longueur ℓ ancrée par l'un de ses côtés à un point O immobile dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$. L'autre extrémité de la corde est libre.

La corde est lâchée tendue d'un angle θ_0 par rapport à la verticale.

1. Étudier le mouvement du fil.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/