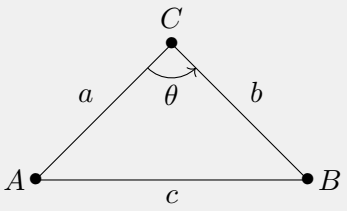
12 - Électrostatique

Outil mathématique : Théorème d'Al-Kashi

Dans un triangle quelconque, le théorème d'Al-Kashi généralise le théorème de Pythagore.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$$



La démonstration repose sur la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Deux fils chargés (⋆⋆)

1. On considère un fil infiniment long dont on néglige l'épaisseur, parallèle à l'axe Oz, portant la densité linéique de charges :

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \text{cte} > 0$$

a. Justifier par raison de symétrie la direction du champ $\overrightarrow{E}$, ainsi que les variables dont il dépend.

b. Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé en tout point M distant de r du fil.

c. En déduire l'expression du potentiel électrostatique V.

d. Retrouver l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ par une intégration directe du champ élémentaire.

2. Soient deux fils infinis parallèles à l'axe Oz, représentés en *Figure 1*, portant des densités linéiques de charges $+\lambda$ et $-\lambda$ distants de $2a$.

Les caractéristiques des deux fils :

- fil n°1 : charge $-\lambda$; $x = -a$; $y = 0$
- fil n°2 : charge $+\lambda$; $x = +a$; $y = 0$

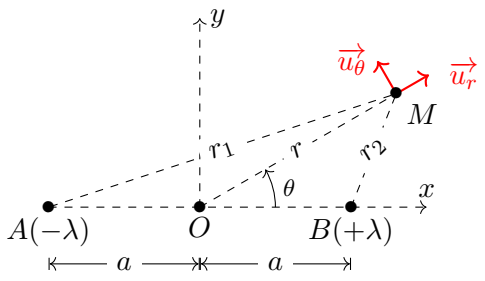


Fig 1. Vue du dessus.

Les fils ne sont pas infiniment proches (a est du même ordre de grandeur que r_1 et r_2, les distances aux deux fils) et le potentiel électrostatique est noté $V(r_1, r_2)$, en choisissant $V = 0$ à égale distance des deux fils. On adopte un système de coordonnées polaires (r, θ) pour repérer le point M dans un plan.

a. En déduire le potentiel en coordonnées polaires $V(r, \theta)$ (il faut utiliser la formule généralisée liant les longueurs dans un triangle).

Les deux fils sont maintenant très proches l'un de l'autre ; c'est-à-dire que l'on s'intéresse à l'expression du potentiel en un point de coordonnées polaires $V(r, \theta)$ tel que $r \gg 2a$, où $2a$ représente la distance entre les deux fils.

b. Calculer alors un développement limité du potentiel $V(r, \theta)$ en ne conservant que les termes du premier ordre en a/r.

c. En déduire par ses composantes dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ (base locale de M des coordonnées polaires), le champ $\overrightarrow{E}(r, \theta)$ créé par les deux fils représentés en *Figure 1*.

EXERCICE 2 Cylindre uniformément chargé (⋆)

On considère une distribution volumique de charges uniforme comprise à l'intérieur d'un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R.

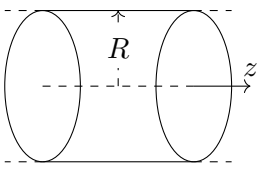


Fig 2. Cylindre de rayon R uniformément chargé.

1. Déterminer le champ $\overrightarrow{E}(M)$ créé par cette distribution en un point quelconque M de l'espace en appliquant le théorème de Gauss.

2. Déterminer le potentiel électrostatique $V(M)$ créé par la distribution en un point quelconque M de l'espace, et à une constante près.
3. Représenter graphiquement la norme E du champ électrostatique ainsi que celle du potentiel V.
4. On assimile le cylindre à un fil chargé par une charge linéique λ.
   - **a.** Quel est le lien entre λ et ρ ?
   - **b.** Déduire de la question 3 le potentiel créé par un fil rectiligne infini selon Oz et chargé avec la densité linéique de charges uniforme λ.
5. On considère maintenant deux fils rectilignes infinis parallèles à Oz, portant les densités linéiques de charges $+\lambda$ et $-\lambda$, placés respectivement en $x = a$ et $x = -a$. Déterminer le potentiel créé par cette distribution en tout point du segment compris entre les deux fils (on prendra l'origine comme point de potentiel nul).

EXERCICE 3 Champ d'une sphère chargée (⋆)

On considère une sphère chargée de rayon R.

1. Calculer en tout point M de l'espace, le champ $\overrightarrow{E}(M)$ créé par la sphère, avec le théorème de GAUSS, puis avec l'équation de MAXWELL-GAUSS.
   - **a.** La sphère est chargée uniformément avec la densité volumique de charges ρ.
   - **b.** La sphère est chargée uniformément avec la densité surfacique de charges σ.
2. Calculer le potentiel électrostatique $V(M)$ associé dans chacun des cas.
3. Calculer l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_E$ de la sphère chargée dans chacun des cas.
4. **a.** Par analogie avec le raisonnement précédent, retrouver le champ gravitationnel créé par la Terre de masse M_T et de rayon R_T, en un point M de l'espace.
   - **b.** En déduire la force que subit le point M s'il a une masse m.

EXERCICE 4 Cavité dans un conducteur (⋆)

Une sphère, de rayon R, porte une charge volumique ρ qui est répartie uniformément dans tout le volume qu'elle occupe à l'exception d'une cavité de rayon a. Le centre de cette cavité est à la distance d du centre de cette sphère.

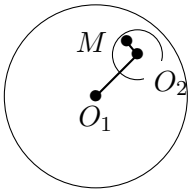


Fig 3. Cavité dans un conducteur.

La cavité est vide de charge.

1. En utilisant le théorème de GAUSS calculer le champ en tout point à l'intérieur de la cavité. Conclure.

L'essentiel

EXERCICE 5 Câble coaxial (⋆⋆)

On considère un câble coaxial formé d'un cœur cylindrique plein de rayon R_1, formé de matière conductrice et infiniment long d'axe Oz, porté au potentiel $V > 0$, entouré d'un condensateur cylindrique creux de rayon intérieur R_2, relié à la Terre (donc au potentiel $V_2 = 0$). Les deux conducteurs sont séparés par du vide.

1. Calculer le potentiel $V(r)$, pour $r \in [R_1; R_2]$ en intégrant l'équation de POISSON et en l'adaptant avec les conditions aux limites.
2. Décrire l'allure des surfaces équipotentielles et des lignes de champ.
3. En déduire l'expression du champ électrostatique. Le calculer directement en fonction de la charge Q_h du cylindre intérieur de longueur h.
4. En déduire la capacité C_h du condensateur cylindrique constitué par une longueur h de câble. Retrouver ce résultat à partir de la densité d'énergie puis par une association de condensateurs élémentaires.
5. On suppose que $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$. Calculer dans ces conditions la capacité du condensateur. Interpréter avec $S_1 = 2\pi R_1 h$?

Données : $\Delta A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$

EXERCICE 6 Décharge d'une sphère (⋆⋆)

On considère deux sphères de rayons R_1 et $R_2 > R_1$ séparées par un gaz non conducteur. La petite sphère porte initialement une charge Q_0 uniformément répartie en surface et la grande sphère une charge $-Q_0$ répartie également en surface. Suite à un flash lumineux, le gaz devient conducteur et est caractérisé par sa conductivité γ. On suppose que le gaz reste localement neutre.

1. Établir l'expression du champ électrique entre les deux sphères, en notant $Q(t)$ la charge de la sphère intérieure.
2. Établir alors l'expression de la densité volumique de courant.
3. En déduire l'expression du champ magnétique engendré.
4. Vérifier les équations de MAXWELL. En déduire une équation différentielle satisfaite par $Q(t)$.
5. Donner alors la charge de $Q^*(t)$ portée par la seconde sphère.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

6. Calculer les énergies électromagnétiques initiale et finale.

EXERCICE 7 Rayon classique de l'électron (⋆⋆⋆)

D'après la théorie de la relativité restreinte, l'énergie $\mathcal{E}$ d'une particule dans son référentiel propre est liée à sa masse par la relation $\mathcal{E} = mc^2$.

1. En considérant que l'électron est une sphère uniformément chargée en volume, quel rayon a lui attribue-t-on si l'on assimile $\mathcal{E}$ à l'énergie électrostatique ? Commenter.
2. La même démarche appliquée au cas du proton est-elle satisfaisante ?

Le moment d'inertie d'une boule de rayon a et de masse m_e est $J = \frac{2}{5}m_e a^2$. L'électron a un moment cinétique intrinsèque $\sigma = \pm\frac{\hbar}{2}$.

3. Montrer que la description de l'électron en tant que sphère solide est incompatible avec les lois de la physique classique au niveau de sa vitesse périphérique v liée à rotation de l'électron sur lui-même.

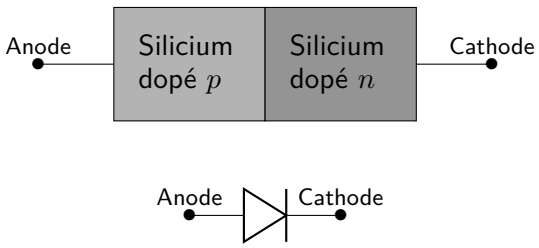
Données :

masse de l'électron : $m_e \simeq 9,11 \times 10^{-31}$ kg
constante : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \times 10^9$ USI
constante de PLANCK réduite : $\hbar \simeq 1,05 \times 10^{-34}$ J · s

Pour aller plus loin

EXERCICE 8 Jonction p-n (⋆⋆)

Lorsque deux semi-conducteurs de types différents P et N sont mis en contact, les porteurs majoritaires de signes opposés se déplacent vers la jonction en raison de la diffusion. Dans le semi-conducteur dopé N, qui a perdu quelques électrons, une charge positive apparaît près de la jonction. En revanche, dans le semi-conducteur dopé P, une charge négative se forme de l'autre côté de la jonction. Ces charges, étant fixes dans le réseau cristallin, ne peuvent pas se recombiner. La barrière de potentiel créée par cette séparation de charges (également appelée tension de seuil) arrête la diffusion. Cette jonction $P-N$ est connue sous le nom de diode à semi-conducteurs. Ses propriétés sont fondamentales pour le fonctionnement des transistors et des circuits intégrés.



On examine un plan infini d'équation $z = 0$ ayant une densité de charge surfacique constante σ. Ce plan se trouve dans un milieu presque isolant où la permittivité du vide ε_0 est remplacée par $\varepsilon_0\varepsilon_r$ dans les formules, y compris dans le théorème de GAUSS pour le champ électrique. Ici, ε_r représente la permittivité relative du milieu.

1. Déterminer le champ électrique en un point M quelconque de l'espace créé par ce plan infini.

On se place dans le germanium, de permittivité relative ε_r, et on suppose que la densité volumique de charges ρ, autour d'une jonction située dans le plan $z = 0$, a l'allure suivante :

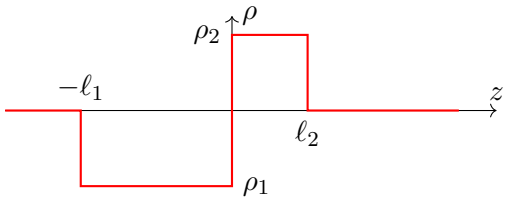


Fig 4. Densité volumique de charges à la jonction

La jonction est suffisamment large pour supposer que la distribution de charges est totalement invariante par toute translation dans le plan (Oxy).

2. Sachant que la distribution de charges est globalement neutre, établir la relation vérifiée par ℓ_1, ℓ_2, ρ_1 et ρ_2.
3. Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point M de l'espace. Représenter graphiquement la valeur algébrique du champ électrique en fonction de z.
4. En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$. On choisira l'origine des potentiels dans le plan $z = 0$. Donner l'expression de la différence de potentiel V_0 entre deux points situés de part et d'autre de la zone de charges.

La région pour $z > 0$ a été dopée n avec de l'antimoine (Sb), à une concentration de $N_2 \simeq 1,6 \times 10^{21}$ atomes Sb par mètre cube. En revanche, la région pour $z < 0$ a été dopée p avec du bore (B), avec une concentration d'atomes $N_1 \gg N_2$. On suppose que dans la zone de charges, chaque atome Sb est ionisé en Sb^+. Les électrons libérés traversent spontanément le plan $(z = 0)$, et chaque atome de B dans cette zone capture un électron, devenant ainsi un ion B^-.

5. En déduire ρ_1 et ρ_2 en fonction de N_1 et N_2.
6. Le système ainsi constitué est une diode à jonction dont la tension seuil est voisine de V_0. En déduire une expression approchée de la largeur δ de la zone de charges.
7. Calculer δ.

Données :

- tension de seuil : $V_0 \simeq 0,3$ V

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

- permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 \simeq 8,84 \times 10^{-12}$ SI
- permittivité relative : $\varepsilon_r \simeq 16$
- charge électronique élémentaire : $e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ C

EXERCICE 9 Molécule linéaire (⋆⋆)

On considère le système de charges représenté en *Figure 5* et on s'intéresse au champ et potentiel électrostatiques créés en un point M éloigné du système.

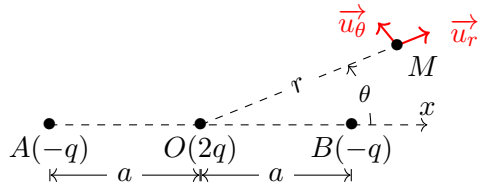


Fig 5. Molécule linéaire.

1. Calculer le moment dipolaire du système, conclure.
2. Calculer le potentiel électrostatique $V(M)$.
3. Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$.
4. Déterminer l'équation des lignes équipotentielles dans un plan contenant (AB) et l'équation des lignes de champ. Tracer ces courbes.
5. Montrer, en utilisant la théorie de Lewis, que les résultats trouvés s'appliquent au champ créé par la molécule de CO_2 en champ lointain.

EXERCICE 10 Condensateur diédrique (⋆⋆)

On considère deux plaques métalliques, de même dimension, initialement en contact. On écarte ces plaques d'un angle α autour de l'axe de rotation Δ.

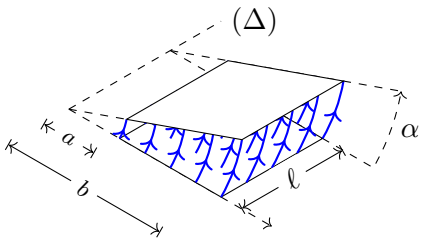


Fig 6. Condensateur diédrique.

Les plaques sont de longueur ℓ, et situées à la distance a de l'axe Δ, selon le schéma : le second côté de longueur ℓ est situé à la distance b de Δ. On appelle C la capacité du condensateur constitué lorsque les plans des plaques font un angle α : le milieu diélectrique est l'air : on néglige les effets de bord. Par conséquent, les lignes de champ sont des arcs de cercle d'axe Δ.

1. Quelle est la forme des équipotentielles pour le condensateur ?
2. Montrer que le champ ne dépend que de r. Calculer la circulation du champ électrique sur une ligne de champ située entre deux plaques à la distance r de l'axe. En déduire l'expression du champ électrique en fonction de r, θ et de la différence de potentiel $U = V(\alpha) - V(0)$ entre les plaques.
3. Calculer la densité de charges sur les armatures, en fonction des mêmes paramètres, puis la charge de chacune d'elles. En déduire la capacité C de ce condensateur dièdre en fonction de α, ℓ, a et b.
4. Calculer l'énergie stockée par le condensateur à l'aide de la densité volumique d'énergie associée au champ et retrouver ainsi l'expression de la capacité du condensateur.

Viser l'X

EXERCICE 11 Potentiel de Yukawa (⋆⋆)

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}} \quad q > 0 \text{ et } a > 0$$

1. Discuter.

EXERCICE 12 Piège à poussière (⋆⋆)

On considère un condensateur cylindrique vertical de hauteur h dont le cylindre intérieur permet de capturer la poussière.

On modélise la poussière qui le traverse par des particules de masse m allant de haut en bas avec une vitesse selon l'axe vertical $v_v = \text{cte}$, et portant un moment dipolaire $\overrightarrow{p} = \alpha\overrightarrow{E}$.

1. À quelles conditions sur les paramètres du condensateur et sur la vitesse verticale v_v, les particules seront capturées avant de sortir du condensateur ?

EXERCICE 13 Défauts de condensateur (⋆⋆⋆)

1. Exprimer la capacité C_0 d'un condensateur formé de deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2.
2. Comment évoluent les lignes de champ lorsqu'on déplace légèrement la sphère interne d'une distance $a \ll R_1$ et que les deux centres des deux sphères ne coïncident plus ?
3. Montrer que les lignes de champ formées sont identiques à celles formées par un système de deux charges électriques ponctuelles, de charges $\pm q$, distantes de D.
4. Déterminer la capacité C formée par les deux sphères dont les centres sont séparés d'une distance a.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/