13 - Magnétostatique

Outil mathématique : Divergence et rotationnel

la divergence $\text{div}\left(\vec{f}\right)$ du champ vectoriel $\vec{f}$ a pour expression générique :

$$\text{div}\,(f) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial\,(h_2 h_3 f_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial\,(h_1 h_3 f_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial\,(h_1 h_2 f_3)}{\partial q_3}\right)$$

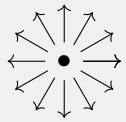
avec h_1, h_2, h_3 et les variables q_1, q_2, q_3 dépendant du système de coordonnées.

Système	cartésien	cylindrique	sphérique
$q_1,\ q_2,\ q_3$	$x,\ y,\ z$	$r,\ \theta,\ z$	$\rho,\ \theta,\ \varphi$
$h_1,\ h_2,\ h_3$	$1,\ 1,\ 1$	$1,\ r,\ 1$	$1,\ \rho,\ \rho\sin(\theta)$

Le rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right)$ du champ vectoriel $\vec{f}$ a pour expression générique :

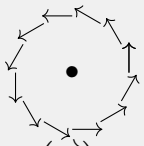
$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{u_1} & h_2\vec{u_2} & h_3\vec{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 f_1 & h_2 f_2 & h_3 f_3 \end{vmatrix}$$

avec $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ les trois vecteurs orthonormés et f_1, f_2 et f_3 les trois composantes associés aux trois systèmes de coordonnées.



$\text{div}\left(\vec{f}\right) \neq 0$

$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right) = \vec{0}$



$\text{div}\left(\vec{f}\right) = 0$

$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right) \neq \vec{0}$

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Tore (⋆)

On considère le tore de la *Figure 1*. Un solénoïde entoure le tore avec N spires enroulées et équitablement réparties sur tout le tore.

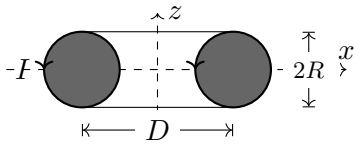


Fig 1. Solénoïde toroïdal.

1. Calculer le champ $\overrightarrow{B}$ créé en tout point de l'espace par un circuit torique de rayon moyen D, dont les sections circulaires ont un rayon R, et comportant N spires.
2. Vérifier les relations de continuité en $D - R$ et en $D + R$.

La relation de passage du champ magnétique à l'interface d'une surface traversée par un courant surfacique j_s, représenté en *Figure 2* est :

$$\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}$$

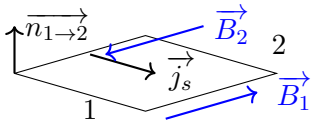


Fig 2. Illustration de la relation de passage.

EXERCICE 2 Ligne coaxiale (⋆⋆)

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques de même axe (Oz) parcourus longitudinalement par la même intensité I, répartie uniformément à la surface des conducteurs. Le sens du courant est dirigé vers les z croissants sur le conducteur intérieur mais il est inversé pour le conducteur extérieur.

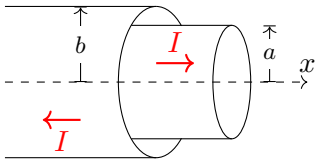


Fig 3. Ligne coaxiale schématisée.

1. Proposer une expression de la densité surfacique de courant j_s sur chaque conducteur en fonction de I et des rayons intérieur a et extérieur b.
2. Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace (on examinera d'abord soigneusement les symétries).
3. Y a-t-il continuité du champ magnétique ? Vérifier la relation de passage.

$$\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}$$

L'essentiel

EXERCICE 3 La spire (⋆⋆)

Soit une spire circulaire de rayon R, d'axe (Oz) appartenant au plan Oxy, parcourue par un courant constant I dans le sens positif.

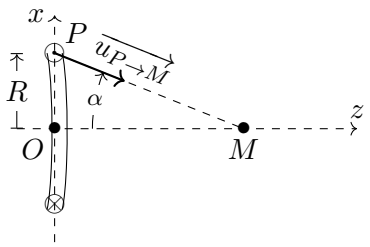


Fig 4. Spire de courant.

On rappelle que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ peut se calculer à partir de la loi de Biot et Savart :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{I\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{u}_{P\to M}}{PM^2}$$

1. Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé en un point M de l'axe (Oz), avec $OM = z$. Tracer la courbe $B(z)$ (avec $\overrightarrow{B} = B(z)\ \overrightarrow{u_z}$). En déduire le champ $\overrightarrow{B}_0$ au centre de la spire.
2. Calculer le champ en un point de l'axe très éloigné de la spire et retrouver le champ du dipôle.
3. On veut calculer, au premier ordre, le champ en un point P distant de r de l'axe (avec $r \ll R$ et z).

   a. Montrer par des considérations de symétrie et d'invariance que le champ n'a pas de composante orthoradiale (selon $\overrightarrow{u_\theta}$) et qu'il peut s'écrire :

   $$\overrightarrow{B}(r,z) = B_r(r,z)\ \overrightarrow{u_r} + B_z(r,z)\ \overrightarrow{u_z}$$

   b. Montrer avec un développement limité et les considérations de symétrie que $B_z(r,z) = B_z(0,z)$

   c. Par un calcul de flux sur un cylindre à préciser, montrer que :

   $$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}(0,z)$$

   En déduire l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ proche de l'axe.

EXERCICE 4 Solénoïde (⋆⋆)

Un solénoïde est un enroulement serré de fils fins parcourus par un courant sur une surface cylindrique d'axe Oz, de centre O, de rayon a et de longueur L, correspondant à l'association de N spires. Il comporte donc n spires par unité de longueur. Il est parcouru par un courant d'intensité I.

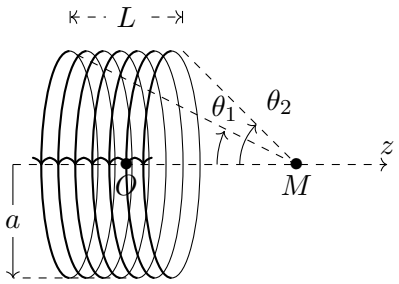


Fig 5. Solénoïde.

Afin de calculer le champ magnétostatique, le solénoïde sera décomposé en portions élémentaires de longueur $\mathrm{d}z_s$.

1. Donner la contribution $\mathrm{d}\overrightarrow{B}(M)$ en fonction de n, $\mathrm{d}z_s$ et $\theta(z_s)$. On rappelle que le champ magnétique sur l'axe d'une spire est donné par la formule :

   $$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3(\theta)\ \overrightarrow{u_z} = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}}\ \overrightarrow{u_z}$$

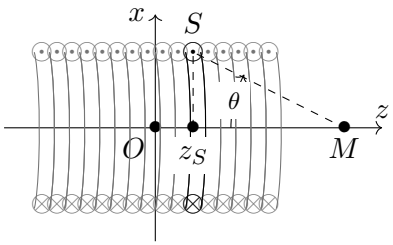


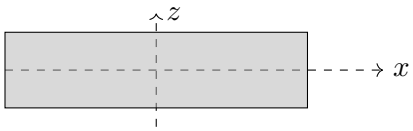
Fig 6. Spire de courant.

2. Exprimer le vecteur champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ en un point M de l'axe Oz en fonction des deux angles θ_1 et θ_2.
3. Calculer en fonction de L et a le vecteur champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$ au point O. Envisager le cas où $a \gg L$.
4. Déterminer l'expression du champ magnétostatique si le solénoïde devient infini.
5. En supposant que le champ est uniforme dans tout le solénoïde, donner l'allure des lignes de champ. Expliquer pourquoi une bobine traversée par un courant est assimilée à un aimant.
6. Application numérique. Calculer la valeur du champ à l'intérieur d'un solénoïde considéré comme infini ($I \simeq 1{,}00$ A, $a \simeq 1$ cm, $n \simeq 1000$ spires/m).

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 5 Effet Meissner (⋆⋆)

On considère un matériau supraconducteur cylindrique de hauteur $2a$ et de rayon R. Dans ce type de matériau, l'équation de LONDON précise que le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ engendre un courant $\overrightarrow{j}$ dans le matériau de sorte que $\overrightarrow{A} = -\lambda^2 \mu_0 \overrightarrow{j}$.



On rappelle que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)$.

1. Préciser la dimension de λ.
2. Établir l'équation vérifiée par le champ magnétique :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B} - \frac{1}{\lambda^2}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

3. On considère le champ magnétique suivant $\overrightarrow{B} = B(z)\,\overrightarrow{u_x}$ dans le matériau, sachant qu'à l'extérieur $\overrightarrow{B} = B_0\,\overrightarrow{u_x}$. En déduire l'expression de $B(z)$ dans le matériau supraconducteur et en dessiner l'allure. Conclusion.
4. En déduire l'expression des courants $\overrightarrow{j}$.
5. À la limite $a \gg \lambda$ en déduire une densité de courant surfacique $\overrightarrow{j_\sigma}$. En déduire la valeur du champ magnétique en dehors et à l'intérieur du supraconducteur.

Données :
Rotationnel du champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

avec $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) - \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A}$.

Pour aller plus loin

EXERCICE 6 Pression magnétique (⋆⋆)

Un « manchon » cylindrique conducteur creux d'axe Oz, infiniment long a pour rayon intérieur R et pour rayon extérieur $R + e$. Il est parcouru par un courant permanent I, de densité $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{u_z}$ uniforme dans le conducteur.

1. **a.** Exprimer le vecteur densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ en fonction de I, e et R.
   b. Si $e \ll R$, montrer que l'on peut assimiler la distribution de courant à une nappe surfacique cylindrique à condition d'introduire un vecteur densité surfacique de courant $\overrightarrow{j}_S$ que l'on exprimera en fonction de j et e.
2. On revient à la description volumique. Calculer le champ $\overrightarrow{B}$ en tout point de l'espace.
3. On se place dans l'hypothèse $e \ll R$. Exprimer $\overrightarrow{B}$ en tout point intérieur ; on pose : $r = R + u$ et on linéarisera l'expression de $B(u)$.
4. On cherche à déterminer l'action mécanique de $\overrightarrow{B}$ sur le conducteur lui-même.
   a. Calculer la force de LAPLACE subie par un élément de volume : on mettra cette force sous la forme : $\mathrm{d}^3\overrightarrow{F} = f(u) R \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z \mathrm{d}u\,\overrightarrow{u_r}$.
   b. En déduire l'expression de la force magnétique appliquée à un élément de tube d'aire d^2S.
   c. Définir et calculer la pression magnétique p_m en fonction de I et R.
   d. $I \simeq 1000$ A, $R \simeq 1{,}0$ cm, $\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7}$ H · m^{-1}. Calculer p_m. Commenter.

Viser l'X

EXERCICE 7 Câble torsadé (⋆⋆⋆)

On considère plusieurs câbles torsadés autour d'un cœur isolant assimilé à du vide de rayon R et isolés les uns des autres par une couche d'isolants d'épaisseur négligeable. Chaque brin du câble est parcouru par un courant électrique d'intensité I.



1. Déterminer l'effort subit par le cylindre isolant central.

EXERCICE 8 Supraconducteur (⋆⋆⋆)

On considère une onde dans un milieu supraconducteur qui vérifie la loi locale :

$$\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E} - \frac{1}{\mu_0\lambda^2}\overrightarrow{A} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{B}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

avec $\overrightarrow{j}$ la densité volumique de courant dans un matériau de conductivité γ. $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont les champs électrique et magnétique ambiants.

1. Trouver l'équation de dispersion dans le milieu.

Un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B_0\ \overrightarrow{u_y}$ parallèle à la face de gauche du supraconducteur est ajouté. On ne considère qu'un régime basse fréquence pour lequel $\overrightarrow{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\overrightarrow{A}$.

2. Déterminer la force surfacique subie par le conducteur.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/