14 - Équations de Maxwell

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Conservation de la charge (⋆)

1. Écrire les équations de MAXWELL en forme différentielle et intégrale.
2. Démontrer la conservation de la charge en utilisant les équations de MAXWELL.

EXERCICE 2 Champ magnétique induit (⋆)

Un champ électrique $\overrightarrow{E} = \frac{1}{r}E_0\cos(\omega t)\ \overrightarrow{u_z}$ est établi dans tout l'espace, dans lequel il n'existe ni charge, ni courant. E_0 et ω sont des constantes, r désigne la distance à l'axe Oz et t le temps.

1. Quelles sont les symétries du champ $\overrightarrow{E}$? En déduire l'allure des lignes du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ induit par le champ $\overrightarrow{E}$.
2. Calculer $\overrightarrow{B}$ dans tout l'espace.

EXERCICE 3 Moment cinétique (⋆⋆)

On considère le dispositif représenté en *Figure 1* d'un système de N charges ponctuelles (de charge q) régulièrement espacées le long d'un plateau de rayon b. Au centre du plateau, un solénoïde supposé infini ($\ell \gg a$), de densité linéique de spires n est parcouru par un courant i constant.

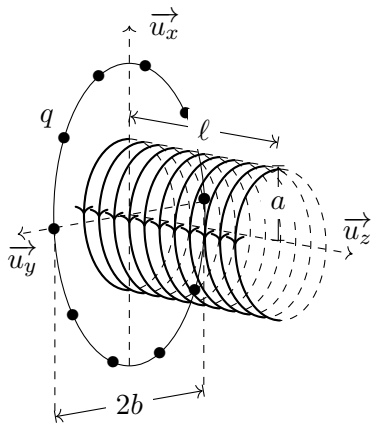


Fig 1. Dispositif électromagnétique.

1. On coupe le courant i. Que se passe-t-il ?
2. Même situation dans le cas d'une spire semi-infinie occupant la zone $z \geq 0$.

L'essentiel

EXERCICE 4 Bilan énergétique (⋆)

On considère un cylindre conducteur, de conductivité électrique γ, d'axe Oz, de longueur infinie et de rayon R, parcouru par un courant permanent d'intensité I, uniformément réparti sur sa section.

1. Calculer la résistance R_ℓ d'une portion du conducteur cylindrique de longueur ℓ.
2. Calculer le champ magnétique à l'intérieur du conducteur.
3. Calculer le vecteur de POYNTING à la surface du conducteur.
4. Calculer le flux du vecteur de POYNTING à travers les parois d'un cylindre de longueur ℓ.
5. Établir un bilan de puissance électromagnétique sur la portion de longueur ℓ du conducteur. Conclure.
6. Calculer la pulsation ω à partir de laquelle l'ARQS puis l'électroneutralité du conducteur n'est plus garantie.

EXERCICE 5 Composants électroniques (⋆⋆)

On considère un circuit RLC série alimenté par une tension $v(t)$. À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur K.

On se focalise plus précisément sur les 3 composants que comporte le circuit : un condensateur de capacité C, un conducteur ohmique de résistance R et une bobine d'inductance L.

PARTIE A : Étude du condensateur :

On modélise ce composant par un condensateur plan (d'épaisseur d) et circulaire (de rayon r). En utilisant le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), et en supposant que le champ électrique est uniforme entre les armatures $\overrightarrow{E} = E\ \overrightarrow{u_z}$ où $E = E(t)$.

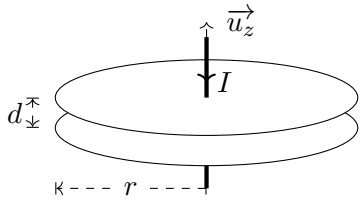


Fig 2. Condensateur plan.

1. Établir les équations de MAXWELL entre les armatures.
2. Établir le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ provoqué par le champ électrique variable $\overrightarrow{E}$.

3. En déduire l'expression du flux du vecteur de POYNTING à travers la surface cylindrique (hauteur d, rayon R) constituée par ce condensateur.
4. Faire un bilan d'énergie sur le volume cylindrique pour en déduire l'expression de l'énergie U stockée entre les armatures.

PARTIE B : Étude de la bobine :

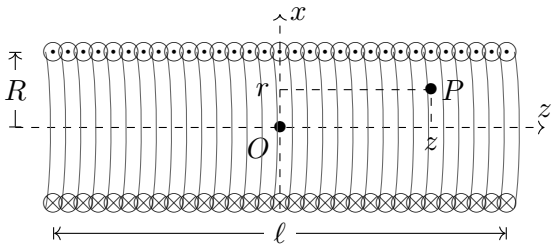


Fig 3. Solénoïde en coupe.

On modélise la bobine par un assemblage de N spires de rayon R sur une longueur totale ℓ, dont on néglige les effets de bord pour le calcul des champs magnétiques, ce qui revient à considérer le champ magnétique uniforme dans le solénoïde.

Le champ magnétique intérieur est uniforme $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ où $B = B(t)$.

5. Établir l'expression du champ électrique induit $\overrightarrow{E}$.
6. Calculer le flux du vecteur de POYNTING sur le volume de la bobine.
7. Appliquer le théorème de POYNTING et en déduire l'expression de l'énergie U emmagasinée dans la bobine.

PARTIE C : Étude d'une résistance :

On modélise le conducteur ohmique par un cylindre de longueur L et de rayon R, de conductivité γ, parcouru par un courant de densité volumique uniforme : $\overrightarrow{J} = J\,\overrightarrow{u_z}$.

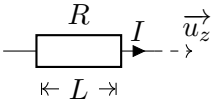


Fig 4. Conducteur ohmique.

Nous utilisons les coordonnées cylindriques (r, θ, z).

8. Rappeler les équations de MAXWELL et donner les expressions du champ électrique et du champ magnétique dans le conducteur.
9. Évaluer le flux du vecteur de POYNTING sur le volume du conducteur ohmique.
10. Faire un bilan d'énergie du conducteur ohmique et retrouver l'expression de la puissance dissipée par effet JOULE dans ce dernier en régime permanent.

Données :
Rotationnel du champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

EXERCICE 6 Émission radioactive (⋆⋆)

Au centre O d'un référentiel galiléen, une source radioactive assimilée à un point, émet des particules chargées de façon isotrope à partir de l'instant $t = 0$. La charge $q(t)$ de la source croît de manière exponentielle selon l'*équation 1*, tandis que les particules émises se déplacent à vitesse constante.

$$q(t) = q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (1)$$

1. Préciser le type de particules émises lors de la désintégration radioactive étudiée.
2. En utilisant des propriétés de symétrie, déterminer la direction du champ électrique et du champ magnétique créés par la présence de charges en mouvement en dans tout l'espace.
3. On se place à un instant t_0. Montrer que le champ électrique est nul au-delà d'une distance r_0 à déterminer. Exprimer le champ électrique pour $r < r_0$.
4. Exprimer la distribution volumique de charges $\rho(r,t)$ ainsi que le vecteur de densité de courant $\overrightarrow{j}(r,t)$. Vérifier la loi de conservation de la charge.

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 ARQS Magnétique (⋆⋆⋆)

L'objet de cet exercice est de comprendre ce qui se cache derrière la notion d'approximation des régimes quasi stationnaires.

On considère un solénoïde de N spires jointives et de longueur ℓ selon l'axe (Oz).

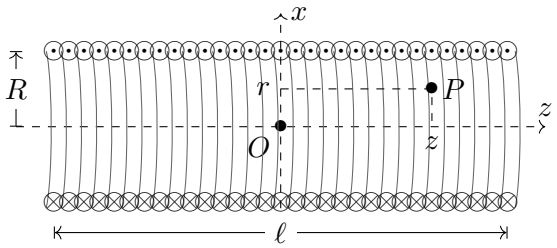


Fig 5. Solénoïde en coupe.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

On note $\underline{I} = I_0 e^{i\omega t}$ l'intensité du courant qui traverse ce solénoïde, on pose $u = \frac{\omega r}{c}$ et on étudie les champs électromagnétiques $(\vec{E}, \underset{\hookrightarrow}{B})$.

1. Rappeler les équations de MAXWELL en régime quasi stationnaire et l'expression du champ magnétostatique $\underset{\hookrightarrow}{B_0}$ dans la bobine.
2. En déduire qu'en ordre de grandeur, on a $\left|\frac{B_r}{B_z}\right| \ll 1$.

On suppose un champ magnétique $\underset{\hookrightarrow}{\underline{B}_0} = B_0 e^{i\omega t}\ \vec{u_z}$, qui crée un champ électrique variable $\underline{\vec{E}}_1 = E_1(r,t)\ \vec{u_\theta}$, qui entraîne à son tour un champ $\underset{\hookrightarrow}{\underline{B}_2} = B_2(r,t)\ \vec{u_z}$ et ainsi de suite : cette méthode itérative est qualifiée de « perturbative ». On pose $u = \frac{\omega r}{c}$.

3. **a.** Montrer qu'à l'ordre 4, on a :
$$\underset{\hookrightarrow}{B}(r,t) = B_0\left(1 - \frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{64} + \dots\right) e^{i\omega t}\ \vec{u_z}$$
b. Montrer de même que :
$$\vec{E}(r,t) = icB_0\left(-\frac{u}{2} + \frac{u^3}{16} + \dots\right) e^{i\omega t}\ \vec{u_\theta}$$
4. Avec l'hypothèse $\frac{\omega r}{c} \ll 1$ dans un circuit « à dominante magnétique », déduire une forme convenable pour les équations de MAXWELL-FARADAY et de MAXWELL-AMPÈRE.
5. Peut-on parler sans ambiguïté d'ARQS ?

EXERCICE 8 Quantité de mouvement (⋆⋆)

On considère un condensateur plan, représenté en *Figure 6*, constitué de deux armatures planes, parallèles, d'aire S, distantes de d. Un milieu matériel isolant, de permittivité diélectrique égale à celle du vide ε_0, solidaire des armatures, occupe l'espace compris entre les deux armatures. Ces dernières portent initialement des charges électriques $\pm Q$. On note (Oz) l'axe normal aux deux armatures du condensateur. Celui-ci est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\underset{\hookrightarrow}{B}$. Le système considéré est isolé.

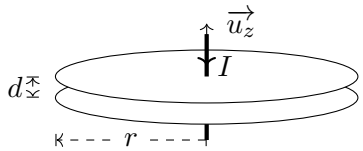


Fig 6. Condensateur plan.

1. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ qui règne entre les deux armatures.
2. À un instant choisi comme origine des temps $(t = 0)$, le milieu qui sépare les deux armatures devient légèrement conducteur, il est parcouru par un courant $I(t)$ pendant que le condensateur se décharge.
   a. Donner l'expression de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur le milieu matériel.
   b. Déterminer l'expression de la quantité de mouvement $\vec{p}$ acquise par le condensateur à la fin de sa décharge.
   c. Montrer qu'on peut écrire $\vec{p}$ sous la forme $\vec{p} = \varepsilon_0 \left(\vec{E} \wedge \underset{\hookrightarrow}{B}\right)\ (Sd)$.
3. Justifier que le principe de conservation de la quantité de mouvement conduit à associer aux champs électrique et magnétique initiaux une densité volumique de quantité de mouvement égale à $\varepsilon_0 \left(\vec{E} \wedge \underset{\hookrightarrow}{B}\right)$.

EXERCICE 9 Moment cinétique du champ (⋆⋆⋆)

On considère un condensateur de géométrie cylindrique, constitué d'un fil, confondu avec l'axe Oz, portant la charge par unité de longueur λ positive et d'un cylindre de rayon a, portant la charge surfacique σ. On suppose que les deux armatures, de longueur D, sont séparées par le vide. Le cylindre extérieur est mobile et sans frottement autour de l'axe Oz.

1. Faire un schéma.
2. À quelle condition relative à la géométrie du condensateur, peut-on légitimement négliger tout effet de bord ? On suppose cette approximation vérifiée par la suite.
3. Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace compris entre les deux armatures du condensateur.
4. Le condensateur est plongé dans un champ magnétique stationnaire $\underset{\hookrightarrow}{B_0} = B_0\ \vec{u_z}$. Déterminer le vecteur de POYNTING dans l'espace inter-armatures ainsi que ses lignes de champ. Commenter.
5. On supprime alors le champ magnétique (son intensité passe donc alors de la valeur B_0 à 0). Montrer que l'armature extérieure est soumise à un couple, dont on précisera le signe. En déduire la vitesse angulaire finale de l'armature extérieure (le moment d'inertie du condensateur, de masse m, par rapport à l'axe est $J = ma^2$), en fonction de la charge totale Q portée par l'armature extérieure, B_0 et m.
6. **a.** Le moment cinétique du condensateur est-il conservé ? Ce résultat est-il en accord avec le théorème du moment cinétique ? On souhaite néanmoins interpréter le résultat obtenu en termes de conservation du moment cinétique. On précise que l'on peut associer au champ électromagnétique une densité volumique de quantité de mouvement donnée par :
$$\vec{g} = \varepsilon_0 \left(\vec{E} \wedge \underset{\hookrightarrow}{B}\right) \qquad (2)$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

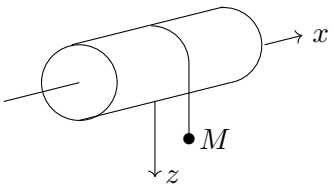
b. Contrôler l'homogénéité de l'expression de $\overrightarrow{g}$.

c. Montrer qu'il y a bien conservation du moment cinétique de l'ensemble {condensateur + champ électromagnétique}.

Viser l'X

EXERCICE 10 Poulie chargée (⋆⋆⋆)

On considère un cylindre uniformément chargé en surface, de longueur ℓ et de rayon R sur lequel est enroulé un fil inextensible et sans masse retenant une masselotte M, de masse m.



On note $\omega(t)$ la vitesse de rotation du cylindre sur son axe.

1. Décrire le mouvement de la masselotte M.

EXERCICE 11 Diode à vide (⋆⋆)

Deux plaques métalliques de surface S sont distantes de d et sont soumises dans le vide à une différence de potentiel V. La plaque de gauche de potentiel nul émet des électrons (initialement de vitesse nulle) qui sont ensuite captés par la plaque de droite au potentiel V. On suppose le régime stationnaire établi : le courant I est uniforme entre les plaques.

1. Déterminer la relation $I(V)$.

EXERCICE 12 Condensateur HF (⋆⋆⋆)

On considère un condensateur constitué de deux disques de rayon R placés en regard l'un de l'autre.

1. Déterminer le champ électrique entre les plaques.
2. Qu'advient-il lorsque le dispositif est soumis à un courant alternatif à haute fréquence ?

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/