16 - Propagation guidée d'ondes EM

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Décrire une onde (⋆⋆)

On donne l'expression du champ électrique associé à une onde électromagnétique :

$$\overrightarrow{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz)\ \overrightarrow{u_x}$$

1. Cette onde est-elle plane ? Le champ électrique est-il transverse ?
2. Exprimer le champ magnétique. Ce champ est-il transverse ? l'onde est-elle transversale ?
3. Exprimer le vecteur de POYNTING puis sa valeur moyenne.
4. On considère la section S telle que $0 < y < a$ et $0 < x < a$. Déterminer l'expression de la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ associée à l'onde électromagnétique traversant cette section.

EXERCICE 2 Propagation entre deux plans (⋆)

On considère une cavité vide pour $-\frac{a}{2} < y < \frac{a}{2}$, limitée par un métal parfait (dans lequel le champ électromagnétique est nul).

1. Déterminer l'équation de propagation pour le champ $\overrightarrow{E}$ à l'intérieur de la cavité.

On considère la propagation dans cette cavité d'une onde électromagnétique caractérisée par :

$$\overrightarrow{E}(M) = E(y) \cos(\omega t - kx)\ \overrightarrow{u_z}$$

On admet que $E\left(\frac{-a}{2}\right) = E\left(\frac{a}{2}\right) = 0$, ceci étant dû à la présence des plans métalliques.

2. Cette onde est-elle plane ? transversale ? Donner les directions de propagation et de polarisation de l'onde.
3. En exploitant l'équation de propagation pour cette onde, montrer que $E(y)$ doit être solution de l'*équation 1*

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + AE = 0 \qquad (1)$$

Exprimer A en fonction de ω, k et c.

4. Déduire alors la forme de la solution pour $E(y)$ et montrer que k doit vérifier la relation (de dispersion) :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{(2n+1)^2\pi^2}{a^2}$$

avec $n \in \mathbb{Z}$.

5. On se place dans le cas où $n = 0$. Exprimer alors le champ magnétique associé à l'onde.

EXERCICE 3 Interface plasma-air (⋆⋆)

On rappelle la relation de dispersion pour un plasma :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

avec ω_p la pulsation plasma caractéristique du milieu. On considère une OEM se propageant dans l'air et arrivant en incidence normale sur l'interface entre l'air (assimilé au vide) et le plasma.

1. Exprimer l'indice de réfraction n associé au plasma en fonction de ω, ω_p et c.
2. Retrouver l'expression du coefficient de réflexion en amplitude r pour le champ électrique à cette interface.
3. Dans le cas où $\omega > \omega_p$, déterminer le coefficient de réflexion en énergie R. Comment choisir idéalement ω afin de réaliser des communications terre-satellite ?
4. Dans le cas où $\omega < \omega_p$, déterminer le coefficient de réflexion en énergie R. Interpréter.

Données :
Valeur moyenne du vecteur de POYNTING :
$\overrightarrow{\langle \Pi \rangle} = \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\overrightarrow{\underline{E}} \wedge \overrightarrow{\underline{B}}^*}{\mu_0}\right)$

L'essentiel

EXERCICE 4 Propagation et réflexion (⋆⋆)

Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un trièdre direct $Oxyz$. On utilise pour les champs $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$ la notation complexe avec $j^2 = -1$. On note $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ les vecteurs unitaires des axes.

Une onde plane monochromatique se propage dans le vide dépourvu de charges et de densités de courants.

Son champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,\omega) = E_0 e^{j(\omega t - kz)}\ \overrightarrow{u_x}$$

avec E_0 réel positif. On note c la vitesse de la lumière dans le vide, ε_0 et μ_0 les permittivité et perméabilité du vide.

1. Établir l'équation de propagation du champ $\overrightarrow{E}(M,t)$ et en déduire l'expression de k.
2. Donner l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ de cette onde, connaissant $\overrightarrow{\underline{E}}(M,\omega)$.

3. L'onde rencontre en $z = 0$ un plan métallique parfait et l'espace $z > 0$ est occupé par ce métal parfait. On note $\overrightarrow{E}_r(M,t)$ le champ réfléchi. Établir l'expression de $\overrightarrow{E}_r(M,t)$.
4. En écrivant le champ magnétique réfléchi $\overrightarrow{B}_r(M,t)$ de manière analogue à celle de $\overrightarrow{E}_r(M,t)$, établir l'expression de $\overrightarrow{B}_r(M,t)$ à l'aide de E_0, c et de $\cos(\omega t + kz)$.
5. On désigne par $\overrightarrow{B}_T(M,t) = \overrightarrow{B}(M,t) + \overrightarrow{B}_r(M,t)$ et par $\overrightarrow{E}_T(M,t) = \overrightarrow{E}(M,t) + \overrightarrow{E}_r(M,t)$ les champs résultants dans le vide. Établir les expressions des champs réels $\overrightarrow{E}_T(M,t)$ et $\overrightarrow{B}_T(M,t)$. De quel type d'onde s'agit-il ?
6. On place en $z = -\ell$ un second plan métallique identique au premier. En introduisant un entier N, préciser les fréquences des ondes stables qui peuvent s'établir entre les deux plans.
7. Qu'implique la relation de passage en $z = 0$ et en $z = -\ell$ concernant le champ $\overrightarrow{B}_T(M,t)$? On donnera les expressions des densités de courant $\overrightarrow{j_s}$ sachant que la relation de passage s'écrit :

$$\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}$$

8. Quelle est la densité moyenne d'énergie volumique $\langle u_{em} \rangle$? Quelle est l'expression de l'énergie électromagnétique moyenne $\langle \mathcal{E}_{\text{em}} \rangle$ localisée dans un cylindre de section S de longueur ℓ de génératrices parallèles à Oz ?

EXERCICE 5 Double plan métallique (⋆⋆)

On considère deux plans parfaitement conducteurs, représentés en *Figure 1*, parallèles au plan Oxy d'équation $z = 0$ et $z = a$.

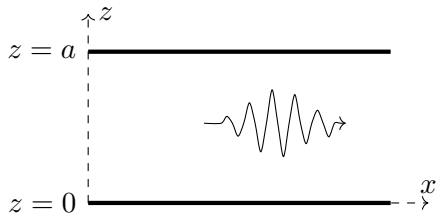


Fig 1. Double plan métallique.

Une onde électromagnétique se propage suivant la direction de l'axe (Ox), entre ces plans, dans le vide. Différents modes de propagation de l'onde sont possibles. On s'intéresse ici au mode transverse électrique (TE) et on donne l'expression du champ électrique :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E(z) \times e^{i(\omega t - kx)}\ \overrightarrow{u_y}$$

1. L'onde est-elle plane ? À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, calculer le champ magnétique. Est-il transversal ? Pourquoi peut-on parler d'onde électrique transversale ?
2. À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, établir l'équation différentielle vérifiée par $E(z)$. Vérifier les autres équations de Maxwell.
3. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $E(z)$. Montrer qu'il existe plusieurs modes de propagation. Donner une condition sur ω. Donner l'expression de la vitesse de phase v_φ en fonction de ω mais pas de k. Y a-t-il dispersion des ondes électromagnétiques ? Y a-t-il atténuation des ondes électromagnétiques ?
4. Tracer $k(\omega)$ pour les différents modes de propagation.
5. Calculer les valeurs moyennes temporelles du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ et de la densité volumique d'énergie u_{EM}.

EXERCICE 6 Guide d'onde coaxial (⋆⋆)

On considère le milieu, assimilé au vide, compris entre deux conducteurs métalliques parfaits cylindriques et coaxiaux, de rayons a et $b > a$. On va déterminer les conditions sur les répartitions de charge et courant afin que le champ dans cet espace soit de la forme $\underline{\overrightarrow{E}} = E(r)\ e^{j(kz-\omega t)}\ \overrightarrow{u_r}$.

1. En exploitant la relation de Maxwell-Gauss, déterminer la fonction $E(r)$ en posant $E(a+) = E_0$.
2. Exprimer $\underline{\overrightarrow{B}}$. L'onde est-elle plane ?
3. Le milieu est-il dispersif pour l'onde étudiée ?
4. Déterminer la valeur moyenne de la puissance transportée par le câble.

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Rayonnement dipolaire (⋆⋆⋆)

On considère une antenne, représentée en *Figure 2*, que l'on modélise comme un dipôle électrique de moment dipolaire $\overrightarrow{P}(t') = \sum_i q_i \overrightarrow{d_i}(t')$ avec q_i les charges électriques placées à la position $\overrightarrow{d_i}(t)$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

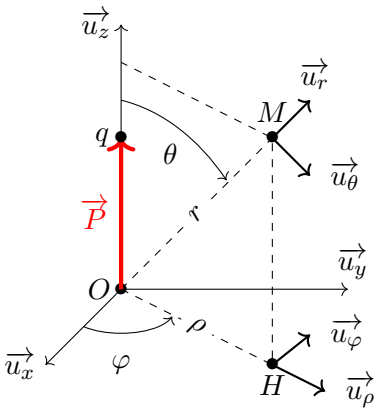


Fig 2. Dipôle électrique rayonnant.

On peut montrer que le potentiel vecteur $\vec{A}(t')$ est relié à l'expression du moment dipolaire $\vec{P}(t')$ par la relation :

$$\vec{A}(t') = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial \vec{P}}{\partial t'}(t') = \frac{\mu_0}{4\pi r} \times \dot{\vec{P}}(t')$$

avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H $\cdot$ m^{-1} la perméabilité du vide et $t - t' = \frac{r}{c}$ l'intervalle de temps nécessaire à la propagation de l'onde entre O et M.

On rappelle que le champ magnétique et le potentiel vecteur $\vec{A}$ sont liés par l'*équation 2*.

$$\overset{\hookrightarrow}{B}(M,t') = \overset{\hookrightarrow}{\text{rot}}\left(\vec{A}(M,t')\right) \qquad (2)$$

1. Rappeler en quoi consiste l'approximation dipolaire.
2. Donner l'expression de $\frac{\partial r}{\partial \rho}$ puis de $\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{r}\right)$.
   NB : r et ρ sont deux variables interdépendantes.
3. En déduire l'expression de $\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\dot{P}(t')}{r}\right)$.
4. Donner l'expression du champ magnétique $\overset{\hookrightarrow}{B}(\vec{r},t')$ avec $\overset{\hookrightarrow}{\text{rot}}\left(\vec{A}\right) = -\frac{\partial A}{\partial \rho}\vec{u_\varphi}$.

Avec le même type de calcul, on peut montrer que le champ électrique $\vec{E}(M,t')$ s'écrit de la manière suivante dans la base $(\vec{u_r},\vec{u_\theta},\vec{u_\varphi})$:

$$\vec{E}(M,t') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 2\cos(\theta)\left(\frac{p(t')}{r^3} + \frac{\dot{p}(t')}{r^2 c}\right) \\ \sin(\theta)\left(\frac{p(t')}{r^3} + \frac{\dot{p}(t')}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}(t')}{r c^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. En supposant que $\vec{p}(t) = p_0\cos(\omega t)\,\vec{u_z}$, exprimer l'amplitude des différents termes dont sont composés les champs électrique $\vec{E}(M,t')$ et magnétique $\overset{\hookrightarrow}{B}(M,t')$.
6. Montrer que dans la zone de rayonnement ($r \gg \lambda$) le champ électromagnétique émis par un dipôle électrique a une structure localement plane.
7. Exprimer dans cette approximation le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t')$.
8. En déduire la puissance totale rayonnée $\mathcal{P}_r(t')$ ainsi que sa valeur moyenne $\mathcal{P}_r = \langle \mathcal{P}_r(t') \rangle$.
9. Expliquer alors qualitativement pourquoi la lumière bleue est plus diffusée que la lumière rouge et expliquer la couleur du ciel.

EXERCICE 8 Modes propres dans une cavité (⋆⋆)

On étudie un champ électrique $\vec{E}(M,t)$ dans une cavité parallélépipédique comme un micro-ondes dont les arrêtes suivent les axes Ox ($OA = a$), Oy ($OB = b$) et Oz ($OC = d$). O étant un sommet. La cavité est représentée en *Figure 3*.

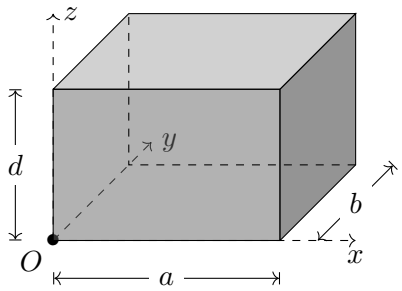


Fig 3. Cavité métallique.

Les parois de cette cavité vide sont délimitées par un métal parfait. Le champ électrique a la forme suivante :

$$E_x = E_1\cos(k_1 x + \varphi_1)\sin(k_2 y + \varphi_2)\sin(k_3 z + \varphi_3)e^{-j\omega t}$$
$$E_y = E_2\sin(k_1 x + \varphi_1)\cos(k_2 y + \varphi_2)\sin(k_3 z + \varphi_3)e^{-j\omega t}$$
$$E_z = E_3\sin(k_1 x + \varphi_1)\sin(k_2 y + \varphi_2)\cos(k_3 z + \varphi_3)e^{-j\omega t}$$

1. Établir une relation liant E_1, E_2, E_3, k_1, k_2 et k_3 ainsi qu'une relation reliant k_1, k_2, k_3 et ω.
2. Calculer les valeurs possibles de ω pour que le champ électrique obéisse aux conditions aux limites. On exprimera ω en fonction des trois entiers n_1, n_2, n_3. On obtient ainsi les pulsations propres de la cavité. Calculer la plus petite pulsation propre sachant que $a < b < d$.
3. Donner la méthode que l'on utiliserait pour calculer l'énergie électrique $\mathcal{E}_E(t)$ emmagasinée dans l'ensemble de la cavité. Puis pour calculer les composantes du champ $\overset{\hookrightarrow}{B}(M,t)$ (on ne tiendra pas compte de l'existence éventuelle de champ magnétostatique), l'énergie magnétique $\mathcal{E}_B(t)$, puis l'énergie totale dans l'ensemble de la cavité.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 9 Corps noir (⋆⋆⋆)

L'intérieur d'un four de côtés ℓ est poussé sous vide et la paroi est percée d'un petit trou permettant d'y insérer un spectromètre étudiant l'équilibre entre les parois de matière à la température T et le rayonnement électromagnétique au sein du four.

Les particules oscillantes constituant la paroi engendrent un champ électrique spontané s'annulant aux extrémités du four. Le potentiel électrique $V(x,y,z,t)$ associé a pour expression :

$$V = V_0 \sin(\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{\ell}\right)$$

avec $(n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{N}^3$ (n_x, n_y et n_z ne pouvant s'annuler deux à deux), le vecteur d'onde correspondant étant $\overrightarrow{k} = \frac{\pi}{\ell}(n_x\ \overrightarrow{u_x} + n_y\ \overrightarrow{u_y} + n_z\ \overrightarrow{u_z})$.

1. Déterminer les pulsations $\omega_{n_x n_y n_z}$ compatibles avec le potentiel V permettant l'annulation du champ électrique sur les parois. Représenter l'ensemble des modes de pulsation $\omega_{n_x n_y n_z}$ dans l'espace (k_x, k_y, k_z) correspondant aux coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{k}$.

Le nombre de modes du champ électrique de pulsation inférieure à ω est ainsi comptabilisé dans un huitième de sphère de rayon $k = \frac{\omega}{c}$ dans l'espace (k_x, k_y, k_z).

PARTIE A : Modèle de Rayleigh-Jeans :

2. Dans la limite $\frac{\pi}{\ell} \ll \frac{\omega}{c}$, déterminer le nombre $N(\omega)$ de modes possibles du champ électromagnétique de pulsation inférieure à ω.
3. En déduire la densité $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\omega}(\omega)$ de modes de pulsation comprise entre ω et $\omega + \mathrm{d}\omega$.

Pour une même pulsation, il existe deux polarisations possibles de la lumière. La densité volumique d'énergie spectrale du rayonnement électromagnétique est donc :

$$u(\omega, T) = \frac{2}{V}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\omega} \times \langle \mathcal{E} \rangle \qquad (3)$$

avec $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathrm{k_B} T$ l'énergie moyenne d'un oscillateur mécanique sur la paroi et $V = \ell^3$ le volume de l'enceinte.

4. Par analogie avec les capacités thermiques des gaz, expliquer l'origine de la relation $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathrm{k_B} T$. Quel est le théorème invoqué ?
5. L'*équation 3* correspond aux mesures effectuées par spectromètre aux faibles pulsations, mais le modèle s'éloigne des mesure à hautes fréquences. Le physicien PAUL EHRENFEST parle de « catastrophe ultraviolette ». Expliquer ce terme.

PARTIE B : Modèle de Planck :

PLANCK introduit une quantification des échanges d'énergie entre le rayonnement électromagnétique et la paroi. Chaque oscillateur constituant la paroi a ainsi une énergie $n\epsilon$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon \neq 0$. La probabilité $\mathbb{P}_n$ que l'oscillateur émette un quantum d'énergie $n\epsilon$ à l'équilibre thermodynamique décroît donc avec n selon un facteur de BOLTZMANN :

$$\mathbb{P}_n = \frac{1}{z} e^{-n\beta\epsilon} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{\mathrm{k_B} T}$$

6. Déterminer l'expression de la *fonction de partition* z en utilisant la condition de normalisation.

L'onde émise étant caractérisée par sa pulsation ω le quanta d'énergie ϵ doit faire apparaître l'expression de ω : c'est la *relation de* PLANCK-EINSTEIN :

$$\epsilon = \hbar\omega \qquad (4)$$

avec $\hbar$ la constante de PLANCK réduite.

7. Calculer l'énergie moyenne $\langle \mathcal{E} \rangle$ d'un oscillateur de la paroi selon le modèle de PLANCK et en déduire $u(\omega, T)$.

Ce résultat constitue la *loi de* PLANCK.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/