15 - Propagation libre d'ondes EM

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Équations d'ondes (⋆)

1. Établir les équations de propagation des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans le vide. Comment s'appelle l'équation de propagation obtenue ?
2. Établir les équations de propagation des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans un milieu conducteur dilué en charges électriques (plasma) de conductivité complexe $\underline{\sigma} = -i\frac{\omega_p^2}{\mu_0 c^2 \omega}$. Comment s'appelle l'équation de propagation obtenue ?
3. Établir les équations de propagation des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans un milieu conducteur de conductivité réelle σ_0 dans la limite de l'ARQS. Comment s'appelle l'équation obtenue ?

EXERCICE 2 OPPH dans un métal (⋆⋆)

On considère une onde plane harmonique de fréquence $f \simeq 1,6$ kHz polarisée rectilignement, se propageant selon l'axe Ox dans un milieu conducteur métallique caractérisé par sa conductivité $\gamma \simeq 6,0 \times 10^7$ USI.

1. Proposer une écriture de la représentation complexe du champ électrique associé à l'onde.
2. Sans effectuer d'hypothèse particulière, trouver la relation de dispersion.
3. Que devient cette relation dans le cadre de l'ARQS ? est-il légitime de se placer dans ce cadre pour l'onde étudiée ?
4. Déterminer dans ces conditions l'expression de l'indice complexe $\underline{n}$ du milieu.
5. Montrer que la propagation de l'onde dans le métal s'accompagne d'une atténuation. Proposer la définition d'une distance caractéristique δ, nommée épaisseur de peau.
6. Au bout de quelle distance l'énergie associée à l'onde a-t-elle été divisée par deux ?
7. Déterminer la valeur de la vitesse de propagation d'une information dans ce métal si la fréquence moyenne du paquet d'onde est $f \simeq 1,6$ kHz.

Données :

perméabilité du vide : $\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7}$ H · m^{-1}.

EXERCICE 3 Polarisation d'une OPPH (⋆)

Décrire l'état de polarisation des ondes suivantes ($k > 0$ et $\omega > 0$)

1. $E_0 \left(\cos(\omega t - kz)\ \vec{u_x} + 2\cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{3}\right)\ \vec{u_y}\right)$
2. $E_0 \left(\cos(\omega t + kz)\ \vec{u_x} + 2\cos\left(\omega t + kz + \frac{\pi}{3}\right)\ \vec{u_y}\right)$
3. $E_0 \left(\cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{8}\right)\ \vec{u_x} + 2\cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{8}\right)\ \vec{u_y}\right)$

L'essentiel

EXERCICE 4 OPPH dans le vide (⋆)

On cherche à établir les équations de propagation du champ électromagnétique dans le vide et à en trouver une solution analytique.

1. Écrire les équations de MAXWELL dans le vide.
2. Établir les équations de propagation du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ et du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ dans le vide.
3. Identifier la vitesse c de propagation de l'onde.
4. On cherche les solutions des équations précédentes sous la forme d'ondes planes monochromatiques harmoniques (O.P.P.H) de la forme :

$$\vec{\underline{E}}(z,t) = \underline{E_0} e^{i(\omega t - kz)}\ \vec{u_x} \text{ et } \vec{\underline{B}}(z,t) = \underline{B_0} e^{i(\omega t - kz)}\ \vec{u_y}$$

Justifier que ces expressions peuvent correspondre à celles d'une O.P.P.H.

5. Établir la relation de dispersion qui existe entre k, ω et c.
6. En calculant $\vec{\text{rot}}\left(\vec{\underline{E}}\right)$ et $\vec{\text{rot}}\left(\vec{\underline{B}}\right)$, montrer que :

$$\vec{\underline{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega} \text{ et } \vec{\underline{E}} = -c^2 \frac{\vec{k} \wedge \vec{\underline{B}}}{\omega}$$

En déduire la valeur de $|\underline{B}|$ en fonction de $|\underline{E}|$ et c.

7. Donner l'expression du vecteur de POYNTING $\vec{\Pi}$ et de la puissance moyenne $\langle \mathcal{P}_\Pi \rangle$ rayonnée à travers une surface $\vec{S} = +S\ \vec{u_z}$.

EXERCICE 5 Lois de Snell-Descartes (⋆⋆)

Lors du passage d'un milieu transparent d'indice $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1}}$ à un autre milieu transparent d'indice de réfraction $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2}}$ ($\neq n_1$), on observe le phénomène de réflexion et de réfraction de l'onde incidente, comme représenté en *Figure 1*.

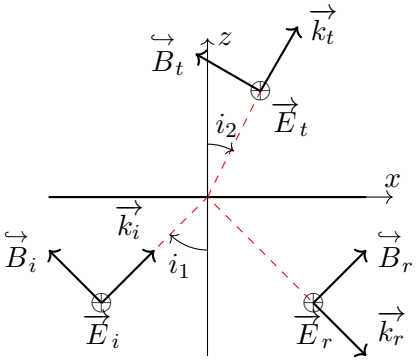


Fig 1. Champs à l'interface.

1. En considérant des milieux d'indices optiques constants, et en cherchant les champs électromagnétiques sous la forme suivante :

$$\underline{\overrightarrow{E}_i} = E_0 e^{i(\omega t - \overrightarrow{k_i}.\overrightarrow{r})}\ \overrightarrow{u_y} \quad \text{et} \quad \underline{\overrightarrow{B}_i} = \frac{\overrightarrow{k_i} \wedge \underline{\overrightarrow{E}_i}}{\omega}$$

établir les équations de propagation de l'onde électromagnétique et donner les relations de dispersion dans chacun des deux milieux en fonction de $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

2. On cherche les champs électriques sous la forme suivante dans chaque milieu :
   - $\underline{\overrightarrow{E}_i} = E_{0_i} e^{i(\omega t - \overrightarrow{k_i}.\overrightarrow{r})}\ \overrightarrow{u_y}$ dans le milieu (1).
   - $\underline{\overrightarrow{E}_r} = E_{0_r} e^{i(\omega t - \overrightarrow{k_r}.\overrightarrow{r})}\ \overrightarrow{u_y}$ dans le milieu (2).
   - $\underline{\overrightarrow{E}_t} = E_{0_t} e^{i(\omega t - \overrightarrow{k_t}.\overrightarrow{r})}\ \overrightarrow{u_y}$ dans le milieu (2).

   À l'aide des relations de continuité du champ électrique, trouver une relation entre les amplitudes complexes de ces champs, valable sur tout le dioptre.
3. En déduire les lois de SNELL-DESCARTES par projection de la relation vectorielle sur le dioptre.
4. En écrivant la relation de la *question* 3 en $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$ et en notant $r_\perp = \frac{E_{0_r}}{E_{0_i}}$ et $t_\perp = \frac{E_{0_t}}{E_{0_i}}$ les coefficients de réflexion et de transmission, donner l'expression de $r_\perp$ et de $t_\perp$ à l'aide des relations de continuité des champs $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$.

EXERCICE 6 Propagation dans un plasma (⋆⋆)

On étudie la propagation d'une OPPH dans un plasma du type : $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\ \overrightarrow{u_y}$. La relation de dispersion pour ce plasma est de la forme $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3 \times 10^8$ m · s^{-1} la célérité de la lumière dans le vide et $\omega_p \simeq 10^{12}$ rad · s^{-1} la pulsation plasma.

1. Sous quelle condition sur ω l'onde sera-t-elle susceptible de se propager dans le plasma ? On se place désormais dans cette condition.
2. Déterminer l'expression de la valeur moyenne de l'énergie électromagnétique volumique associée à l'onde.
3. Déterminer l'expression de la valeur moyenne du vecteur de POYNTING.
4. À l'aide de ces deux grandeurs, déterminer l'expression de la vitesse de propagation de l'énergie v_e.
5. Donner une condition entre ω et ω_p afin que le milieu soit faiblement dispersif. À quoi pouvez-vous alors comparer l'expression de la vitesse v_e ?

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Couche anti-reflet (⋆⋆⋆)

Un verre d'indice n (réel) est recouvert d'une mince couche transparente d'épaisseur a et d'indice N (réel). Le dispositif est représenté en *Figure 2*. L'air a un indice de réfraction unitaire.

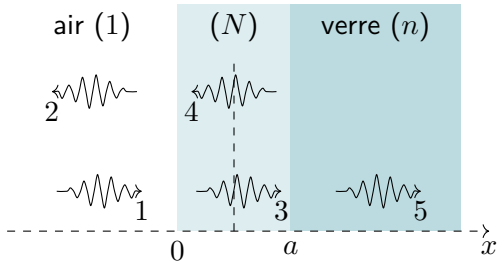


Fig 2. Couche anti-reflet.

Une OPPH monochromatique à polarisation rectiligne arrive en incidence normale sur le dioptre air-couche mince en $x = 0$. On note la représentation complexe du champ électrique associé $\underline{\overrightarrow{E}_1} = E_0\ e^{i(\omega t - kx)}\ \overrightarrow{u_z}$.

On ne considère dans ce problème que les ondes 1, 2, 3, 4 et 5 et on admet la continuité du champ électrique et du champ magnétique aux interfaces.

1. Donner la représentation complexe associée à chacune de ces ondes.

On souhaite annuler la réflexion sur le premier dioptre pour la longueur d'onde $\lambda_j \simeq 570$ nm.

2. Exprimer les coefficients de réflexion et de transmission (r,t) au premier dioptre et (r',t') au deuxième dioptre.
3. Montrer que la condition pour obtenir une réflexion nulle sur le premier dioptre (soit $\underline{E}_{0_2} = 0$) s'écrit :

$$e^{j\frac{2Na\omega}{c}} \times \left(N^2 + nN - N - n\right) = N - n + N^2 - nN$$

4. En déduire la ou les valeurs de a et N pour satisfaire la condition.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

EXERCICE 8 Effet de peau (⋆⋆)

Le fil conducteur est de section cylindrique de rayon a et d'axe Oz. La densité volumique de courant est non uniforme et pour une différence de potentiel harmonique de pulsation ω aux bornes du fil, on peut écrire $\underline{\vec{j}} = \underline{j}(r)e^{i\omega t}\,\vec{u_z}$. On se place dans l'ARQS, de sorte que $\underline{\vec{j}}(r,z,t) \simeq \underline{\vec{j}}(r,t)$ comme le suggère la relation précédente, et la conductivité électrique γ est réelle.

1. Donner l'expression du champ électrique $\underline{\vec{E}}$.
2. Déterminer l'équation vérifiée par $\underline{\vec{E}}$ d'une part et $\underline{\vec{j}}$ d'autre part.
3. On propose la forme de la solution $\underline{j}(r) = j_0 e^{(1+i)\frac{r-a}{\delta}}$. Déterminer l'expression de δ dans l'hypothèse où $r \gg \delta$, en fonction de μ_0, ω et γ.
4. En déduire l'expression de $\vec{j}$ et donner l'allure de l'amplitude J_a de j.
5. Évaluer les sections du conducteur où il y a passage du courant pour les fréquences $f_1 \simeq 50$ Hz et $f_2 \simeq 100$ MHz. Comparer alors les résistances R_1 et R_2 du fil, associées à ces deux fréquences.
6. Quelle solution pouvez-vous proposer afin de limiter les pertes par effet JOULE à haute fréquence ?

Données :

$$\Delta\underline{j}(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\underline{j}}{\mathrm{d}r}\right)$$

EXERCICE 9 Polariseur (⋆⋆⋆)

1. Une onde plane monochromatique traverse un polariseur. Lorsque l'on fait varier l'orientation du polariseur, l'intensité du faisceau lumineux qui en sort varie d'un maximum à un minimum non nul. Qu'en déduit-on quant à la polarisation de l'onde ?
2. Combien d'orientations du polariseur correspondent au maximum ? Au minimum ? Comment se placent-elles les unes par rapport aux autres ?
3. On oriente le polariseur au minimum d'intensité. On intercale alors entre la source et le polariseur une lame quart-d'onde, en prenant soin que ses axes lent et rapide soient parallèles aux axes « passant » et « bloquant » du polariseur. On tourne ensuite le polariseur, sans toucher à la lame quart-d'onde ; lorsqu'il a tourné d'un angle de $30°$, l'intensité lumineuse s'annule. Qu'en déduit-on quant à la polarisation de l'onde émise par la source ?
4. Pourquoi faut-il placer la lame quart-d'onde avant le polariseur et non l'inverse ?

Viser l'X

EXERCICE 10 Signal extraterrestre (⋆⋆⋆)

Un capteur détecte l'onde électromagnétique représentée en *Figure 3*.

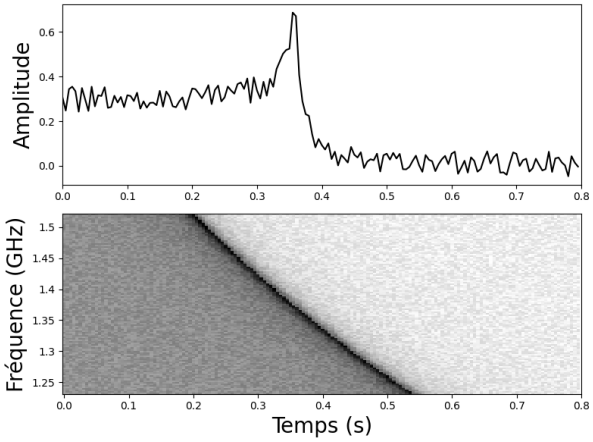


Fig 3. Signal radio détecté.

Données :

- Densité moyenne d'électrons dans l'univers : $n^\star \simeq 0,2$ m^{-3}.

1. En supposant que l'onde à été émise lors d'une impulsion de très courte durée, préciser à quelle distance à été émis ce signal.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/