# Mécanique quantique - potentiels

## Pour réviser le cours

### EXERCICE 1 Équation de Schrödinger (⋆)

On suppose une onde plane progressive harmonique, de pulsation $\omega$ et de vecteur d'onde $\vec{k}$ :

$$\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\Psi}_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

1. Rappeler la relation de dispersion qui existe dans le vide entre $\omega$, $k$ et $c$, la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.
2. Rappeler la relation de PLANCK-EINSTEIN liant l'énergie $\mathcal{E}$ d'un grain de lumière (ou « photon ») à sa pulsation $\omega$.
3. Rappeler la relation de LOUIS DE BROGLIE reliant l'impulsion $\vec{p} = m\vec{v}$ d'une particule de masse $m$ au vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde qui lui est « associée ».
4. Démontrer que pour toute particule de masse $m$ à qui on peut « associer » une OPPH vérifie la relation suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \underline{\Psi}}{\partial x^2}(x,t) = i\hbar\frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial t}(x,t)$$

Nommer l'équation en question.

### EXERCICE 2 Solutions stationnaires (⋆)

On cherche les solutions stationnaires à l'équation de SCHRÖDINGER :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2}(x,t) = i\hbar\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t}(x,t)$$

Pour cela, on considère une particule quantique à laquelle on associe la fonction d'onde $\underline{\psi}(x,t) = \varphi(x) \times g(t)$ avec $\varphi(x) \in \mathbb{C}$ et $g(t) \in \mathbb{C}$.

1. L'onde recherchée correspond-elle à une onde stationnaire ? Justifier votre réponse.
2. Montrer qu'il existe une constante $\mathcal{E}$ (indépendante du temps et de l'espace) telle que :

$$g(t) = g_0 e^{i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t}$$

3. Simplifier alors l'équation de SCHRÖDINGER dans le cas d'un état stationnaire. Que devient-elle dans le cas où la particule quantique étudiée évolue dans un champ d'énergie potentielle $V(x)$ ?
4. Que représente $\left|\underline{\psi}(x,t)\right|^2$ ? Que remarque-t-on dans le cas d'un état stationnaire ?

### EXERCICE 3 La marche de potentiel (⋆)

On considère une particule de masse $m$ et d'énergie $\mathcal{E}$ qui évolue dans le sens des $x$ croissants et qui subit en $x = 0$ une interaction modélisée par une marche de potentiel représentée en *Figure 1*. L'énergie potentielle $V(x)$ de la particule est alors donnée par $V(x) = 0$ si $x < 0$ et $V(x) = V_0$ si $x > 0$.

#### PARTIE A : particule classique :

1. Rappeler le comportement de la particule en mécanique classique en distinguant les cas $\mathcal{E} > V_0$ et $\mathcal{E} < V_0$.

#### PARTIE B : particule quantique ($\mathcal{E} > V_0$) :

On cherche les solutions de la forme :

$$\psi_g(x,t) = \left(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\right)e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t}$$

pour $x < 0$ et $\psi_d(x,t) = Ce^{iqx}e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t}$ pour $x > 0$.

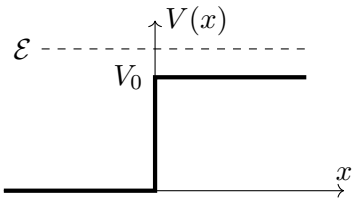



Fig 1. Marche de potentiel.

2. Interpréter les différents termes de cette fonction d'onde et établir les expressions des grandeurs $k$ et $q$ en fonction des données du problème.
   Comment varie la longueur d'onde associée à la particule au passage de $x = 0$ ?
3. Rappeler les relations de continuité de la fonction d'onde en $x = 0$. Établir les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude notés respectivement $r = \frac{B}{A}$ et $t = \frac{C}{A}$.
4. Déterminer, en utilisant les courants de probabilité, les coefficients de transmission et de réflexion de la particule, notés respectivement $T$ et $R$. Expliquer la différence de comportement par rapport à une particule classique.

#### PARTIE C : particule quantique ($\mathcal{E} < V_0$) :

L'énergie cinétique de la particule incidente est à présent inférieure à la hauteur de la marche de potentiel ($\mathcal{E} < V_0$), comme représenté en *Figure 2*.

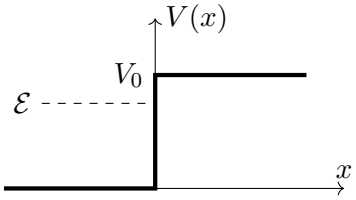



Fig 2. Marche de potentiel.

L'expression de la fonction d'onde dans la région de droite est modifiée en

$$\underline{\psi}_d(x,t) = Ce^{-\alpha x}e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t}$$

5. Établir l'expression de la grandeur $\alpha$ en fonction des données du problème. Caractériser complètement cette onde $\underline{\psi}_d(x,t)$.
6. Déterminer les nouvelles valeurs $r'$, $t'$, $R'$ et $T'$ des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en puissance pour la particule. Commenter ces expressions.

## EXERCICE 4 États libres (⋆)

On considère une particule plongée dans un potentiel $V(x)$ en forme de puits carré, c'est-à-dire défini par : $V(x) = -V_0 < 0$ pour $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$ et nul ailleurs.

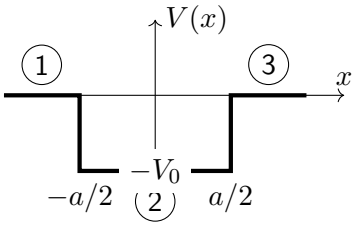



Fig 3. Puits de potentiel.

On étudie le cas où le niveau d'énergie de la particule vérifie $\mathcal{E} > 0$ (états libres).

1. Résoudre l'équation de SCHRÖDINGER dans chacune des trois zones et écrire les relations de raccordement.
2. Montrer que pour toute énergie $\mathcal{E}$, les solutions forment un espace vectoriel à deux dimensions. Montrer que toute solution peut se décomposer en deux ondes planes qui se propagent en sens contraire. Peut-on normer ces solutions ?

Soit $\varphi(\overrightarrow{r},t)$ la fonction d'onde d'une particule de masse $m$ placée dans un potentiel $V(\overrightarrow{r})$. On définit la densité de probabilité de présence de la particule au point $\overrightarrow{r}$ et à l'instant $t$ par :

$$\rho(\overrightarrow{r},t) = |\varphi(\overrightarrow{r},t)|^2 = \varphi^*(\overrightarrow{r},t)\varphi(\overrightarrow{r},t)$$

3. **a.** Montrer que cette densité satisfait à l'équation de conservation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{J} = 0$$

avec $\overrightarrow{J}$ à expliciter.

**b.** Donner $\overrightarrow{J}$ pour une fonction d'onde de la forme :

$$\varphi(\overrightarrow{r},t) = Ae^{if(\overrightarrow{r},t)}$$

**c.** Préciser $\overrightarrow{J}$ dans le cas d'une onde plane :

$$f(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t$$

## L'essentiel

## EXERCICE 5 Puits de potentiel (⋆)

On considère un puits de potentiel carré de profondeur $V_0$ et de largeur $2a$ représenté en *Figure 4*, tel que $V(x) = 0$ si $x \in [-a\,;a]$ et $V(x) = V_0$ sinon.

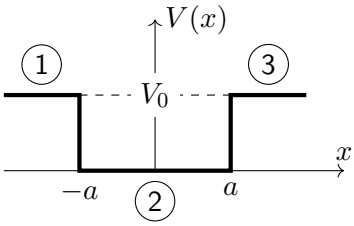



Fig 4. Puits de potentiel.

Nous nous intéressons qu'aux états liés, c'est-à-dire d'énergie $0 < \mathcal{E} < V_0$ qui correspondent à une particule confinée dans le puits en mécanique classique. $\mathcal{E}$ est donc l'énergie cinétique à l'intérieur du puits.

1. Donner l'expression de l'équation stationnaire de SCHRÖDINGER dans les trois zones de l'espace.
2. En déduire la forme de la fonction d'onde $\psi(x)$ dans les trois zones de l'espace. On note :

$$K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - \mathcal{E})} \quad \text{et} \quad k = \sqrt{\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}}$$

3. En justifiant et en écrivant les conditions aux limites des trois zones, montrer que suivant les conditions choisies :

$$k \times \text{cotan}(ka) = -K \quad \text{ou} \quad k \times \tan(ka) = K$$

Interpréter ces deux résultats.
4. Montrer que $K$ et $k$ sont liés entre eux par une équation d'un cercle.
5. Proposer une résolution graphique des conditions aux limites.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

## EXERCICE 6 L'oscillateur harmonique (⋆⋆)

On note $\underline{\psi}(x,t)$ la fonction d'onde du système décrivant l'oscillateur harmonique associé à une molécule diatomique, représentée en *Figure 5*.

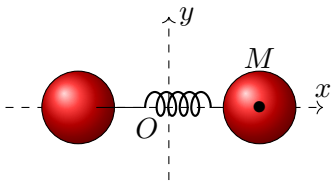



**Fig 5.** Oscillateur harmonique quantique.

Ce système consiste en un point matériel $M$ de masse $\mu$ (masse réduite dans le référentiel barycentrique) se déplaçant le long d'un axe $(O,\overrightarrow{u_x})$. La distance $x = OM$ représente l'élongation du ressort de raideur $k$, modélisant la liaison chimique entre les deux atomes via le potentiel $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

Le système étant stationnaire, la fonction d'onde peut être séparée en deux parties :

$$\underline{\psi}(x,t) = f(x)e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t}$$

où $\mathcal{E} > 0$ correspond aux valeurs d'énergie accessibles au système.

La fonction $\underline{\psi}(x,t)$ est une solution de norme unité de l'équation de SCHRÖDINGER :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial x^2}(x,t) + V(x)\underline{\psi}(x,t) = i\hbar\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial t}(x,t)$$

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f$ en fonction des paramètres $k$, $\mu$, $\hbar$ et $\mathcal{E}$.

On effectue le changement de variable $\alpha \;\hat{=}\; x\left(\frac{\mu k}{\hbar^2}\right)^{1/4}$ et l'on pose $\gamma \;\hat{=}\; \left(\frac{4\mu\mathcal{E}^2}{\hbar^2 k}\right)^{1/2}$.

2. Quelles sont les dimensions de $\alpha$ et de $\gamma$ ?
3. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(\alpha)$ en fonction du seul paramètre $\gamma$.
4. Vérifier que dans le régime $\alpha \to \pm\infty$, on peut écrire $f(\alpha) \sim e^{\pm\frac{1}{2}\alpha^2}$
5. Justifier succintement que seule la solution $\alpha \mapsto e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$ est physiquement acceptable.

Dès lors que nous connaissons le comportement asymptotique de la solution recherchée, nous pouvons l'extraire de celle-ci en effectuant le changement de fonction $f(\alpha) = g(\alpha)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$.

6. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\alpha \mapsto g(\alpha)$ ?

Pour résoudre cette équation, on effectue un développement en série entière de la fonction $g$ :

$$g(\alpha) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p\alpha^p$$

7. Exprimer le coefficient $b_{p+2}$ en fonction du coefficient $b_p$, de l'entier $p$ et de $\gamma$.

Si l'on conserve tous les termes de la série, on montre que le comportement asymptotique de la fonction $\alpha \to g(\alpha)$ l'emporte sur $e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$ en $\pm\infty$ ce qui ne permet pas de construire de solution physiquement acceptable. La seule possibilité est de tronquer la série en imposant l'existence d'un entier $n$ tel que si $p \geq n$ alors $b_{p+2} = 0$.

8. En déduire que les énergies accessibles à un oscillateur harmonique en régime quantique sont de la forme

$$\mathcal{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et où $\omega$ est une grandeur que l'on exprimera en fonction de $\mu$ et $k$.

## EXERCICE 7 Effet tunnel (⋆⋆)

On considère des électrons qui arrivent dans la partie $x < 0$ sur une barrière de potentiel rectangulaire unidimensionnelle de hauteur $V$ et de largeur $a$, représentée en *Figure 6*.

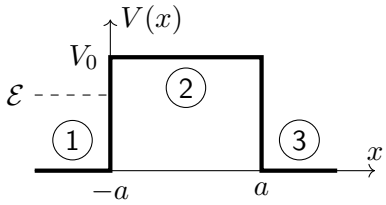



**Fig 6.** Barrière de potentiel.

On associe aux électrons d'énergie $\mathcal{E}$ une fonction d'onde $\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\psi}(x)e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t}$ et un vecteur courant de probabilité :

$$\overrightarrow{\underline{j}}(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\left(\underline{\Psi^*}\overrightarrow{\text{grad}}\,(\underline{\Psi}) - \underline{\Psi}\overrightarrow{\text{grad}}\,(\underline{\Psi^*})\right)$$

La fonction d'onde électronique vérifie l'équation de SCHRÖDINGER :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\underline{\Psi}}{\partial x^2} + V(x)\underline{\Psi} = i\hbar\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t}$$

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\psi}(x)$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. On cherche une solution de l'équation de SCHRÖDINGER de la forme suivante (avec $k$ et $K$ des grandeurs positives)

$$\underline{\psi}(x) = \begin{cases} e^{ikx} + \alpha e^{-ikx} & z < 0 \\ \gamma e^{-Kx} + \delta e^{Kx} & 0 \leq x \leq a \\ \beta e^{ikx} & z > a \end{cases}$$

Exprimer $k$ et $K$ en fonction de $\mathcal{E}$, $m$, $V_0$, $\hbar$ et $m$ et donner une interprétation des différents termes $e^{ikx}$, $\alpha e^{-ikx}$, $\gamma e^{-Kx}$, $\delta e^{Kx}$ et $\beta e^{ikx}$. On pourra également indiquer pourquoi il n'apparaît qu'un terme $\beta e^{ikx}$ dans le domaine $x > a$.

3. On définit le coefficient de transmission $T$ à travers la barrière par le rapport du flux d'électrons transmis par le flux d'électrons incidents. Montrer que $T$ est égal à $|\beta|^2$.

4. La prise en compte des conditions aux limites au niveau de la barrière aboutit à :

$$T(k, K) = \frac{4k^2K^2}{4k^2K^2 + (k^2 + K^2)^2 \,\mathrm{sh}^2(Ka)}$$

Montrer que si $Ka \gg 1$, on obtient la formule approchée

$$T(\mathcal{E}) = \frac{16\mathcal{E}(V_0 - \mathcal{E})}{V_0^2} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0-\mathcal{E})}{\hbar}}a}$$

5. Ce coefficient $T(\mathcal{E})$ tend vers $0$ dans les trois cas limites suivants :

- $(V - \mathcal{E}) \to +\infty$
- $a \to +\infty$
- $\hbar \to 0$ (ou $m \to +\infty$).

Indiquer la signification physique de ces trois cas limites.

## EXERCICE 8 Le carotène (⋆⋆)

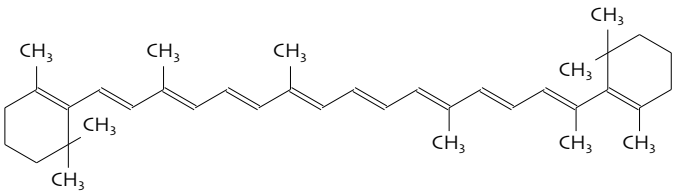



Fig 7. Molécule de $\beta$-carotène.

*Certaines molécules organiques ayant une longue chaîne linéaire, comme le $\beta$-carotène, contiennent des électrons qui ne sont pas attachés à un noyau particulier, mais peuvent au contraire se déplacer sur toute la longueur de la molécule par mésomérie.*

On modélise un tel électron, de masse $m \simeq 9,11 \times 10^{-31}$ kg, comme une particule qui se déplace librement sur un segment de droite, entre les abscisses $x = 0$ et $x = \ell$. L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ est nulle sur le segment et infinie partout ailleurs (particule confinée dans une « boîte »). Sa fonction d'onde $\psi(x)$ est alors liée à son énergie totale $\mathcal{E}$ par l'équation différentielle de SCHRÖDINGER stationnaire (1).

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}(x) = \mathcal{E}\psi(x) \qquad (1)$$

où $h$ est la constante de PLANCK.

1. On cherche tout d'abord à déterminer la fonction d'onde $\psi(x)$.
   - **a.** Justifier que $\psi(x)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[0; \ell]$.
   - **b.** $\psi(x)$ étant une fonction continue, elle est donc nulle aux deux extrémités de la molécule : $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$. Montrer que la solution de l'équation différentielle est de la forme de l'*équation (2)*.

$$\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad (2)$$

   où $n$ est un entier et $A_n$ une constante.
   - **c.** Déterminer l'expression de $A_n$. Nommer la condition utilisée pour identifier son expression.
2. Donner l'expression des niveaux d'énergie $\mathcal{E}_n$ en fonction de $m$, $\ell$, $h$ et $n$.
3. Montrer, en détaillant votre raisonnement, que l'on obtient le même résultat pour l'énergie fondamentale $\mathcal{E}_1$ (à un facteur adimensionné près) comme conséquence du *principe d'indétermination* d'HEISENBERG.
4. Dans le $\beta$-carotène, ce sont les électrons des onze liaisons doubles qui se comportent comme des particules libres confinées sur une longueur $\ell \simeq 1,83$ nm (22 électrons au total). Dans l'état fondamental de la molécule, ces électrons occupent les onze niveaux d'énergie les plus bas.
   - **a.** Calculer les énergies $\mathcal{E}_{11}$ et $\mathcal{E}_{12}$ des niveaux $n = 11$ et $n = 12$.
   - **b.** En déduire l'énergie, puis la longueur d'onde $\lambda$ dans le vide, d'un photon absorbé par la molécule, lorsqu'un électron passe du niveau $11$ au niveau $12$.
   - **c.** Expliquer alors la couleur orangée des organismes contenant une grande quantité de cette molécule (carottes, citrouilles...).

*Données :*

conversion : $1$ eV $\simeq 1,6 \times 10^{-19}$ J ;
constante de PLANCK : $h \simeq 6,63 \times 10^{-34}$ J · s ;
énergie fondamentale : $\mathcal{E}_1 \simeq 0,113$ eV ;
célérité de la lumière dans le vide : $c \simeq 3,0 \times 10^8$ m · s$^{-1}$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

## Pour aller plus loin

### EXERCICE 9 Paquet d'onde (⋆⋆⋆)

On considère une particule libre de masse $m$, d'énergie $\mathcal{E}$ dont l'état peut être décrit par la fonction $s(x,t)$.

1. Soit une fonction d'onde $s(x,t) = Ae^{j(kx-\omega t)}$.
   - **a.** Donner la relation qui existe entre $\omega$ et $k$ pour que $s(x,t)$ soit solution de l'équation de SCHRÖDINGER. En déduire la valeur de l'énergie $\mathcal{E}$ en fonction de $\omega$.
   - **b.** Calculer la densité de probabilité $|s(x,t)|^2$ de la particule. L'état du système peut-il être décrit par $s(x,t)$ ainsi définie ?
2. On propose la fonction $s(x,t)$ définie par :

$$s(x,t) = C\int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{j(kx-\omega t)}\mathrm{d}k$$

où $g(k)$ est une fonction du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$.

   - **a.** Justifier pourquoi $s(x,t)$ est solution de l'équation de SCHRÖDINGER. $s(x,t)$ représente-t-elle un état physique ?
   - **b.** À $t = 0$, l'état du système est représenté par $s(x,0)$. Pour quelle valeur de $C$, $g(k)$ est la transformée de FOURIER de $s(x,0)$ ? Quelle condition doit satisfaire $g(k)$ pour que $s(x,t)$ soit normalisable ?

### EXERCICE 10 Puits de potentiel (⋆⋆)

On considère une particule quantique évoluant dans un puits de potentiel représenté en *Figure 8*.

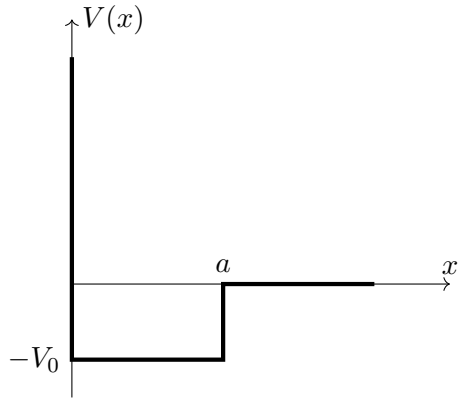



Fig 8. Puits de potentiel.

1. Déterminer la plus petite valeur de $V_0$ pour laquelle il existe un état lié.

### EXERCICE 11 Particule confinée (⋆⋆⋆)

Il s'agit de traiter le problème d'une particule « libre » de masse $m$, confinée entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ de l'axe réel. On désigne par $v$ le module de la vitesse de la particule quand elle a l'énergie $\mathcal{E}$.

1. Quelle est la période $T$ du mouvement ?
2. Exprimer la pulsation correspondante $\omega$ en fonction de la vitesse $v$, puis en fonction de l'énergie $\mathcal{E}$.
3. Représenter graphiquement l'abscisse $q(t)$ de la particule.
4. On écrit la série de FOURIER de $q(t)$ sous la forme :

$$q(t) = \sum_{k\in\mathcal{Z}} q_k e^{ik\omega t}$$

trouver les coefficients de FOURIER $q_k$ (distinguer les deux cas $k = 0$ et $k \neq 0$).

5. Appliquer la condition de BOHR-WILSON-SOMMERFELD :

$$\int_0^T p\mathrm{d}q = nh$$

pour obtenir les énergies quantifiées $\mathcal{E}_n$, avec $n \in \mathbb{N}$, $p$ la quantité de mouvement de la particule et $h$ la constante de PLANCK.

6. En déduire dans ce cas les quantités $\omega(n,k)$ (pulsations harmoniques) et $q(n,k)$ (coefficients de FOURIER de $q(t)$).

### EXERCICE 12 Émission d'électrons (⋆)

On applique un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E} = -E\,\overrightarrow{u_x}$ à l'extérieur du conducteur dans la direction normale à sa surface.

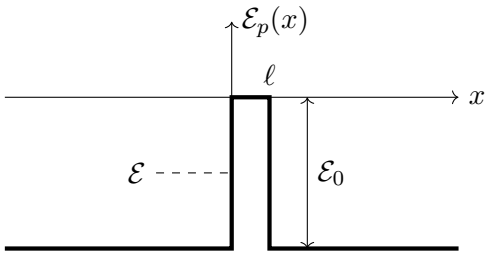



Fig 9. Barrière de potentiel.

1. Pour $x > 0$, calculer $\mathcal{E}_p(x)$. Quel est le signe de $E$ pour que $\mathcal{E}_p(x)$ ait la forme représentée en *Figure 9* et que l'on puisse envisager une transmission hors du conducteur par effet tunnel pour des électrons d'énergie $\mathcal{E} < 0$.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. Calculer le coefficient de transmission $T$ si localement on peut appliquer la formule suivante :

$$T \simeq 16\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}e^{-\frac{2\ell}{\hbar}\sqrt{2m\mathcal{E}_0}}$$

avec $\ell$ la largeur de la barrière de potentiel à traverser. Faire l'application numérique avec $E \simeq 4\times 10^9$ V·m$^{-1}$ et $\mathcal{E} \simeq -5$ eV.

## Viser l'X

### EXERCICE 13 Électron dans un cristal (⋆⋆⋆)

On considère une électron piégé dans le défaut d'un cristal, modélisé par une cavité cubique de volume $\ell^3$ et dans laquelle l'électron est libre de se déplacer. On rappelle l'équation de SCHRÖDINGER qui décrit le mouvement de cet électron, de fonction d'onde $\psi(x,y,z)$, dans la cavité :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x,y,z)\psi = \mathcal{E}\psi$$

1. Déterminer les niveaux d'énergie possibles pour l'électron. Déterminer alors la longueur d'onde des photons absorbés qui permettent une transition de l'état fondamental vers le premier état excité pour $\ell \simeq 0,5$ nm.

On considère maintenant que la cavité peut se déformer mais en gardant son volume constant $\ell^3$, tel que $\ell_x = \alpha\ell$ et $\ell_y = \ell_z = \beta\ell$.

2. Déterminer la valeur de $\alpha$ qui minimise l'énergie du premier état excité. Quelle est alors la longueur d'onde des photons émis lors du retour du premier état excité vers le fondamental pour $\ell \simeq 0,5$ nm ?

### EXERCICE 14 Oscillations de Rabi (⋆⋆⋆)

On considère une particule de masse $m$ astreinte à se déplacer dans un puits de potentiel de largeur $\ell$. On note sa fonction d'onde :

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x)e^{i\frac{\mathcal{E}_1}{\hbar}t} + \varphi_2(x)e^{i\frac{\mathcal{E}_2}{\hbar}t}\right)$$

où $\varphi_1(x)$ est la solution de l'équation de SCHRÖDINGER dans l'état fondamental du système et $\varphi_2(x)$ la solution du premier niveau excité.

1. Donner l'expression de la position moyenne $\langle x\rangle$ de la particule et montrer la dépendance en $t$.
2. Interpréter cette dépendance temporelle et calculer la période $T$ des oscillations.
3. Trouver une équation analogue à l'équation de HEISENBERG liant $T$ et $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$.
4. Calculer $T$ pour un électron en mouvement autour d'un noyau d'atome.

### EXERCICE 1 Équation de Schrödinger (⋆)

1. L'équation de d'Alembert pour une OPPH s'écrit :

$$\Box\underline{\Psi} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta\underline{\Psi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\Psi}}{\partial t^2} = 0$$

La relation de dispersion est obtenue en insérant la forme souhaitée du champ recherché ($\underline{\Psi} = \Psi_0 e^{i(kx-\omega t)}$) dans l'équation de propagation. On obtient :

$$\boxed{k = \pm\frac{\omega}{c}}$$

2. La relation de PLANCK-EINSTEIN est $\boxed{E = h\nu = \hbar\omega}$.
3. La relation de LOUIS DE BROGLIE est $\boxed{\overrightarrow{p} = \hbar\overrightarrow{k}}$. On obtient donc $E = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} = \frac{\hbar^2\overrightarrow{k}^2}{2m}$.
4. On peut calculer :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\underline{\Psi}}{\partial x^2} &= (ik)^2\underline{\Psi} = -k^2\underline{\Psi} \\ \frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t} &= -i\omega\underline{\Psi} \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t} = (i\omega)\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\underline{\Psi}}{\partial x^2}$$

soit :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t}=-\frac{\omega\hbar}{k^2}\frac{\partial^2\underline{\Psi}}{\partial x^2}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\underline{\Psi}}{\partial x^2}}$$

Il s'agit de l'équation de SCHRÖDINGER (pour un milieu sans énergie potentielle).
L'équation de SCHRÖDINGER prend une allure différente suivant la convention d'écriture choisie :

- Pour $\underline{\Psi}=\Psi_0 e^{i(\omega t-kx)}$, l'équation de SCHRÖDINGER s'écrit :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\underline{\Psi}}{\partial x^2}=i\hbar\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t}$$

- Pour $\underline{\Psi}=\Psi_0 e^{i(kx-\omega t)}$, l'équation de SCHRÖDINGER s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\underline{\Psi}}{\partial x^2}=i\hbar\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t}$$

On veillera à toujours garder la deuxième convention d'écriture en mécanique quantique.

## EXERCICE 2 Solutions stationnaires (⋆)

1. Un état stationnaire et une onde stationnaire sont deux choses différentes.
   - Si $\underline{\psi}(x,t)=\varphi(x)\times g(t)$ avec $\varphi(x)\in\mathbb{R}$ et $g(t)\in\mathbb{R}$, on parle d'**onde stationnaire**.
   - Si $\underline{\psi}(x,t)=\underline{\varphi}(x)\times\underline{g}(t)$ avec $\underline{\varphi}(x)\in\mathbb{C}$ et $\underline{g}(t)\in\mathbb{C}$, on parle d'**état stationnaire**.

   L'onde recherchée n'est donc **pas une onde stationnaire**.
2. On cherche une solution sous forme d'état stationnaire : $\underline{\psi}(x,t)=\underline{\varphi}(x)\times\underline{g}(t)$. L'équation de SCHRÖDINGER devient donc :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\underline{g}(t)\times\frac{\mathrm{d}^2\underline{\varphi}}{\mathrm{d}x^2}(x)=i\hbar\underline{\varphi}(x)\frac{\mathrm{d}\underline{g}}{\mathrm{d}t}(t)$$

soit :

$$\frac{i\hbar}{2m}\frac{\underline{\varphi}''(x)}{\underline{\varphi}(x)}=\frac{\dot{\underline{g}}(t)}{\underline{g}(t)}\hat{=}\,i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}$$

Les deux fonctions à variables séparables ne sont égales qui si elles sont égales à une constante commune.
On a donc un système de deux équations différentielles à résoudre :

$$\dot{\underline{g}}(t)-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}\underline{g}(t)=0\quad\text{et}\quad\underline{\varphi}''(x)-\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}\underline{\varphi}(x)=0$$

On peut donc en déduire que $\underline{g}(t)$ est de la forme :

$$\boxed{\underline{g}(t)=g_0 e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t}}$$

3. L'équation de SCHRÖDINGER pour un état stationnaire devient :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\underline{\varphi}}{\mathrm{d}x^2}(x)=-\mathcal{E}\underline{\varphi}(x)}$$

Si la particule de masse $m$ évolue dans un potentiel $V(x)$, l'équation de SCHRÖDINGER est :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\underline{\varphi}}{\mathrm{d}x^2}(x)+V(x)\underline{\varphi}(x)=-\mathcal{E}\underline{\varphi}(x)}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

4. $\left|\underline{\psi}(x,t)\right|^2$ est la densité de probabilité de présence de la particule au point $x$ à $\mathrm{d}x$ près et à l'instant $t$ à $\mathrm{d}t$ près lors d'une mesure.

   La probabilité de trouver la particule entre $x_1$ et $x_2$ est par exemple :

$$p_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \left|\underline{\psi}(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x$$

   Dans le cas d'un état stationnaire, $\left|\underline{\psi}(x,t)\right|^2 = \left|\underline{\varphi}(x)\right|^2 \times g_0^2$
   La densité de probabilité de présence de la particule lors de la mesure est **indépendante du temps**.

## EXERCICE 3 La marche de potentiel (⋆)

1. Les calculs sont analogues à ceux d'un astéroïde s'approchant d'un autre astre :
   - Si $\mathcal{E} > V_0$, la particule **peut accéder** aux positions $x > 0$.
   - Si $\mathcal{E} < V_0$, la particule **ne peut pas accéder** aux positions $x > 0$.

2. Le premier terme $A^{ikx}$ correspond à l'onde incidente se propageant dans la direction $+\overrightarrow{u_x}$. Le terme $B^{-ikx}$ correspond à l'onde réfléchie se propageant dans la direction $-\overrightarrow{u_x}$. Le dernier terme $Ce^{iqx}$ correspond à l'onde transmise se propageant dans la direction $+\overrightarrow{u_x}$.
   Dans la zone de gauche, $\psi_g$ vérifie l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\underline{\psi_g}}{\partial x^2}(x,t) = i\hbar\frac{\partial\underline{\psi_g}}{\partial t}(x,t)$$

   soit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(ik)^2\underline{\psi_g}(x,t) = i\hbar \times \left(-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}\right)\underline{\psi_g}(x,t)$$

   ce qui permet d'exprimer $k$ :

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}}}$$

   De la même manière, dans la zone de droite, $\underline{\psi_d}$ vérifie l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\underline{\psi_d}}{\partial x^2}(x,t) = i\hbar\frac{\partial\underline{\psi_d}}{\partial t}(x,t)$$

   soit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(ik)^2\underline{\psi_d}(x,t) + V_0\underline{\psi_d}(x,t) = i\hbar \times \left(-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}\right)\underline{\psi_d}(x,t)$$

   ce qui permet d'exprimer $q$ :

$$\boxed{q = \sqrt{\frac{2m(\mathcal{E}-V_0)}{\hbar^2}}}$$

3. La fonction d'onde ainsi que sa dérivée spatiale sont continues. Par conséquent :

$$\underline{\psi_g}(0,t) = \underline{\psi_d}(0,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\underline{\psi_g}}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial\underline{\psi_d}}{\partial x}(0,t)$$

   soit :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$(A+B)e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t} = Ce^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t} \Rightarrow \boxed{A+B=C} \quad \text{et} \quad ik \times (A-B)e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t} = C \times iq \times e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t} \Rightarrow \boxed{A-B=\frac{q}{k}C}$$

**Démonstration :**

L'équation de SCHRÖDINGER intégrée une fois par rapport à la variable $x$ s'écrit autour de n'importe quel point $x_0$ à $\varepsilon$ près :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial x}(x_0+\varepsilon,t) - \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial x}(x_0-\varepsilon,t)\right) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}(\mathcal{E}-V(x))\underline{\psi}(x,t)\mathsf{d}x$$

Or, $\displaystyle\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}(\mathcal{E}-V(x))\underline{\psi}(x,t)\mathsf{d}x \to 0$ pour $\varepsilon \to 0$. On obtient donc :

$$\boxed{\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial x}(x_0^+,t) = \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial x}(x_0^-,t)}$$

La dérivée spatiale de la fonction d'onde est continue lorsque le potentiel $V(x)$ est continu. En renouvelant l'opération avec une seconde intégration, on montre que la fonction d'onde est nécessairement continue (que le potentiel $V(x)$ soit continu ou non).

On obtient donc les deux relations suivantes (en divisant les deux équations précédentes par $A$) :

$$1+r=t \quad \text{et} \quad 1-r=\frac{q}{k}t$$

soit :

$$\boxed{r=\frac{k-q}{k+q}} \quad \text{et} \quad \boxed{t=\frac{2k}{k+q}}$$

4. Le courant de probabilité est défini par :

$$\overrightarrow{j}(x,t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\underline{\psi}^\star \overrightarrow{\mathsf{grad}}\left(\underline{\psi}\right) - \underline{\psi}\overrightarrow{\mathsf{grad}}\left(\underline{\psi}^\star\right)\right]$$

Le courant de probabilité « incident » est donc :

$$\boxed{\overrightarrow{j_i}(x,t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[Ae^{-ikx+i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t} \times ik \times Ae^{ikx-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t} - Ae^{ikx-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t} \times (-ik) \times Ae^{-ikx+i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t}\right] \overrightarrow{u_x} = \frac{\hbar k}{m}A^2\ \overrightarrow{u_x}}$$

Par des calculs similaires, on peut exprimer le courant de probabilité « réfléchi » $\overrightarrow{j_r}(x,t)$ et transmis $\overrightarrow{j_t}(x,t)$ :

$$\boxed{\overrightarrow{j_r}(x,t) = -\frac{\hbar k}{m}B^2\ \overrightarrow{u_x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{j_t}(x,t) = -\frac{\hbar q}{m}C^2\ \overrightarrow{u_x}}$$

On peut donc exprimer les coefficient de réflexion $R$ et de transmission $T$ en puissance :

$$\boxed{R \mathrel{\hat{=}} \left|\left|\frac{\overrightarrow{j_r}}{\overrightarrow{j_i}}\right|\right| = \frac{B^2}{A^2} = r^2} \quad \text{et} \quad \boxed{T \mathrel{\hat{=}} \left|\left|\frac{\overrightarrow{j_t}}{\overrightarrow{j_i}}\right|\right| = \frac{qC^2}{kA^2} = \frac{q}{k}t^2}$$

NB : Les nombres d'onde $k$ et $q$ jouent le même rôle que des indices optiques lorsqu'une onde lumineuse traverse un dioptre transparent.
On remarque que $R \neq 0$ : la particule quantique peut rebondir sur une barrière de potentiel alors que la théorie classique prévoit qu'une barrière de potentiel franchissable est franchie de façon certaine.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

5. La fonction d'onde $\underline{\psi}_d(x,t)$ vérifie l'équation de SCHRÖDINGER :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\underline{\psi}_d}{\partial x^2}(x,t)+V_0\underline{\psi}_d(x,t)=i\hbar\frac{\partial\underline{\psi}_d}{\partial t}(x,t)$$

soit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-\alpha)^2\underline{\psi}_d(x,t)+V_0\underline{\psi}_d(x,t)=i\hbar\times\left(\frac{i\mathcal{E}}{\hbar}\right)\times\underline{\psi}_d(x,t)$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\alpha=\pm\sqrt{\frac{2m(V_0-\mathcal{E})}{\hbar^2}}}$$

6. Les conditions de continuités de la fonction d'onde à la limite du domaine de définition s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl}A+B&=&C\\A-B&=&-i\frac{\alpha}{k}C\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}1+r'&=&t'\\1-r'&=&-i\frac{\alpha}{k}t'\end{array}\right.$$

soit :

$$\boxed{r'=\frac{k-i\alpha}{k+i\alpha}}\quad\text{et}\quad\boxed{t'=\frac{2k}{k+i\alpha}}$$

Pour trouver les coefficients de réflexion et de transmission en puissance, il faut multiplier les deux relations obtenues précédemment :

$$(1+r')(1-r')=1-r'^2=-i\frac{\alpha}{k}t'^2$$

On peut donc identifier $\boxed{r'^2=R'}$ et $\boxed{-i\frac{\alpha}{k}t'^2=T'}$ de telle sorte que $R'+T'=1$.

Comme $T'\neq 0$, la particule quantique peut être détectée là où la particule classique n'aurait pas pu l'être (en $x>0$). Néanmoins, de manière analogue au cas classique, $|R|=1$.

## EXERCICE 4 États libres (⋆)

1. Dans les zones (1) et (3), l'équation de SCHRÖDINGER s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}(x)+\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}\psi(x)=0$$

soit, avec $k^2=\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$ :

$$\underbrace{\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}}_{\text{Dans }]-\infty;-a/2[}\quad\text{et}\quad\underbrace{\psi(x)=Ce^{ikx}+De^{-ikx}}_{\text{Dans }]a/2;\infty[}$$

avec $A$, $B$, $C$ et $D$ à déterminer à partir des conditions aux limites.

Dans la zone (2), l'équation de SCHRÖDINGER s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}(x)+\frac{2m(\mathcal{E}+V_0)}{\hbar^2}\psi(x)=0$$

soit, avec $K^2=\frac{2m(\mathcal{E}+V_0)}{\hbar^2}$ :

$$\underbrace{\psi(x)=Ee^{iKx}+Fe^{-iKx}}_{\text{Dans }]-a/2;a/2[}$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

avec $E$ et $F$ à déterminer à partir des conditions aux limites.

La fonction d'onde étant une fonction $\mathcal{C}^1$ en l'absence de barrière de potentiel infinie, on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Ae^{-ik\frac{a}{2}}+Be^{ik\frac{a}{2}} & = & Ee^{-iK\frac{a}{2}}+Fe^{iK\frac{a}{2}} \\ ik\left(Ae^{-ik\frac{a}{2}}-Be^{ik\frac{a}{2}}\right) & = & iK\left(Ee^{-iK\frac{a}{2}}-Fe^{iK\frac{a}{2}}\right) \\ Ce^{ik\frac{a}{2}}+De^{-ik\frac{a}{2}} & = & Ee^{iK\frac{a}{2}}+Fe^{-iK\frac{a}{2}} \\ ik\left(Ce^{ik\frac{a}{2}}-De^{-ik\frac{a}{2}}\right) & = & iK\left(Ee^{iK\frac{a}{2}}-Fe^{-iK\frac{a}{2}}\right) \end{array}\right.$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2ikAe^{-ik\frac{a}{2}} & = & i(k+K)Ee^{-iK\frac{a}{2}}+i(k-K)Fe^{iK\frac{a}{2}} \\ 2ikBe^{ik\frac{a}{2}} & = & i(k-K)Ee^{-iK\frac{a}{2}}+i(k+K)Fe^{iK\frac{a}{2}} \\ 2ikCe^{ik\frac{a}{2}} & = & i(k+K)Ee^{iK\frac{a}{2}}+i(k-K)Fe^{-iK\frac{a}{2}} \\ 2ikDe^{-ik\frac{a}{2}} & = & i(k-K)Ee^{iK\frac{a}{2}}+i(k+K)Fe^{-iK\frac{a}{2}} \end{array}\right.$$

**2** Si $\mathcal{E}+V(x)\neq 0$, il existe deux racines à l'équation caractéristique associée à l'équation de SCHRÖDINGER. Par conséquent, la solution de l'équation se décompose en deux solutions indépendantes, les racines de l'équation caractéristique étant $k(x)=\pm\sqrt{\frac{2m(\mathcal{E}+V(x))}{\hbar^2}}$.

En notant respectivement $e^{ikx}$ et $e^{-ikx}$ les solutions correspondant aux ondes planes progressives et respectives, la forme des solutions est bien une combinaison linéaire de ces deux solutions indépendantes.

Ces fonctions ne sont pas de carré intégrable puisque $\int_{\mathbb{R}}\left|e^{ikx}\right|^2\mathrm{d}x$ diverge.

Seul le **paquet d'onde** $\int g(k)e^{ikx}\mathrm{d}k$ qui est une somme continue d'OPPH est une solution physique acceptable à l'équation de SCHRÖDINGER.

**3** **a.** On note $\overrightarrow{J}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\varphi\frac{\partial\varphi^\star}{\partial x}-\varphi^\star\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$. L'équation de SCHRÖDINGER vérifiée par $\varphi$ et sa version complexe conjuguée s'écrivent :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x)+V(x)\varphi(x)=i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{3}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi^\star}{\partial x^2}(x)+V(x)\varphi^\star(x)=-i\hbar\frac{\partial\varphi^\star}{\partial t} \tag{4}$$

En faisant l'opération $\varphi^\star\times(3)-\varphi\times(4)$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\varphi^\star\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\varphi\frac{\partial^2\varphi^\star}{\partial x^2}\right)=i\hbar\left(\varphi^\star\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

d'où :

$$-i\hbar\frac{\partial J}{\partial x}=i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

l'équation de la charge est donc bien vérifiée : $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial J}{\partial x}=0$.

Une généralisation en trois dimensions permet d'obtenir l'expression avec div $\left(\overrightarrow{J}\right)$.

**b.** L'expression de $\overrightarrow{J}$ s'obtient à partir de sa définition :

$$\overrightarrow{J}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\varphi\overrightarrow{\mathsf{grad}}\left(\varphi^\star\right)-\varphi^\star\overrightarrow{\mathsf{grad}}\left(\varphi\right)\right)$$

soit :

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

$$\overrightarrow{J} = \frac{i\hbar}{2m}\left(|A|^2 e^{if}\overrightarrow{\text{grad}}\left(e^{-if}\right) - |A|^2 e^{-if}\overrightarrow{\text{grad}}\left(e^{if}\right)\right)$$

soit :

$$\overrightarrow{J} = \frac{i\hbar\,|A|^2}{2m}\left(e^{if}\left(-i\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\,e^{-if}\right) - e^{-if}\left(i\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\,e^{if}\right)\right)$$

donc :

$$\boxed{\overrightarrow{J} = \frac{\hbar\,|A|^2}{m}\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)}$$

**c.** Dans le cas d'une OPPH :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right) = \left(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{r} + \overrightarrow{k}\wedge\overset{\hookrightarrow}{\text{rot}}\,(\overrightarrow{r}) + \left(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{k} + \overrightarrow{r}\wedge\overset{\hookrightarrow}{\text{rot}}\left(\overrightarrow{k}\right)$$

avec $\overset{\hookrightarrow}{\text{rot}}\,(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{0}$, $\overset{\hookrightarrow}{\text{rot}}\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{0}$ et $\left(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$ et $\left(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{r} = \overrightarrow{k}$

soit :

$$\boxed{\overrightarrow{J} = \frac{|A|^2}{m}\hbar\overrightarrow{k}}$$

avec $\hbar\overrightarrow{k}$ la quantité de mouvement de la particule, soit $\frac{\hbar\overrightarrow{k}}{m}$ une quantité qui serait analogue à la vitesse classique.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/