22 – Physique statistique

Pour réviser le cours

EXERCICE 1 Expérience de Kappler (⋆)

L'expérience de Kappler *(1931) a permis de mesurer la constante de* Boltzmann *à partir des fluctuations de position d'un petit pendule de torsion placé dans une enceinte thermostatée de température T.*

Le pendule est constitué par un petit miroir suspendu au bout d'un fil de quartz, représenté en *Figure 1*. Ce miroir peut tourner autour de l'axe du fil et sa position est repérée par l'angle de torsion φ du fil, angle dont l'origine est prise lorsque le fil n'est pas déformé. Le miroir est à l'équilibre avec le gaz à température T qui l'entoure. Il est sujet à des fluctuations de sa position angulaire ($\varphi = 0$) dues à l'agitation thermique. L'énergie potentielle associée à la torsion du fil est $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}C\varphi^2$ où C est la constante de rappel du fil.

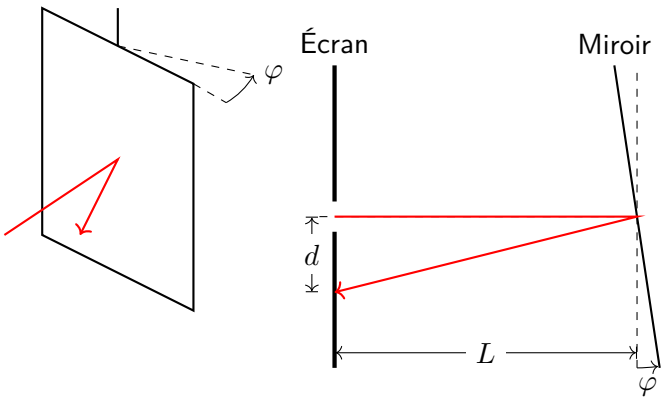


Fig 1. Dispositif de Kappler.

1. Pour repérer la rotation du miroir, on l'éclaire avec un rayon lumineux dont l'angle d'incidence est nul lorsque $\varphi = 0$. Le rayon réfléchi engendre un point lumineux sur un écran placé à une distance L du miroir. Quelle est la distance d entre ce point lumineux et le rayon incident lorsque le miroir a tourné d'un petit angle φ ?
2. L'angle φ fluctue autour de 0.
   - **a.** En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, exprimer $\langle\varphi^2\rangle$.

     Avec les données suivantes : $T \simeq 287,1$ K, $C \simeq 9,428 \times 10^{-16}$ kg · m² · s⁻² et $L \simeq 0,865$ m, Kappler a mesuré $\langle d^2\rangle \simeq 1,250 \times 10^{-5}$ m².
   - **b.** Quelle valeur de la constante de Boltzmann a-t-il trouvé ?

EXERCICE 2 Expérience de Jean Perrin (⋆⋆)

Dans son livre « les atomes », publié en 1913, Jean Perrin *décrit des expériences qui lui ont permis de mesurer le nombre d'*Avogadro.

Jean Perrin prépare une suspension aqueuse de grains sphériques de gomme-gutte, une résine jaune d'origine végétale, tous ayant un rayon a d'environ un dixième de micron. Ces grains, observés au microscope dans une cuve de profondeur $\ell \simeq 100\,\mu$m, ont une densité d'environ $d \simeq 1,194$.

1. Chaque grain est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède, qui est opposée au poids du volume d'eau déplacé. Montrez que l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(z)$ d'un grain de coordonnée z le long de l'axe vertical (Oz) est de la forme $\mathcal{E}_p(z) = Az$, où A est une constante. Exprimez A en fonction de l'accélération due à la pesanteur g, de la densité μ_{eau} de l'eau, du rayon a du grain, et de la densité d du grain.
2. En faisant l'hypothèse que la répartition ses grains suit la loi de Boltzmann, déterminer et calculer une longueur h, dépendant de A et de la température T de l'échantillon, qui caractérise la répartition des grains selon l'axe (Oz).

Lors d'expériences soignées avec des grains de rayon $a \simeq 0,212\,\mu$m, Perrin a trouvé que les concentrations des grains en quatre plans horizontaux équidistants traversant la cuve aux niveaux : 5, 35, 65 et 95 μm sont proportionnelles respectivement aux nombres : 100, 47, 23 et 12.

3. En déduire une valeur approchée du nombre d'Avogadro, sachant que la constante des gaz parfaits vaut $R \simeq 8,314$ J · K⁻¹ · mol⁻¹, en prenant pour la température de l'échantillon la valeur $T \simeq 273$ K.

EXERCICE 3 Un modèle de diffusion (⋆⋆)

On considère un problème de marche aléatoire à une dimension. À l'instant initial, une particule est en $x = 0$. À chaque instant τ suivant, la particule a une probabilité $1/2$ de faire un saut à droite et $1/2$ de faire un saut à gauche. Les positions possibles de la particule sont espacées d'une distance a comme représenté en *Figure 2*. Au bout d'un temps $N \times \tau$, on note q le nombre de sauts faits à droite et $N - q$ le nombre de sauts faits à gauche.

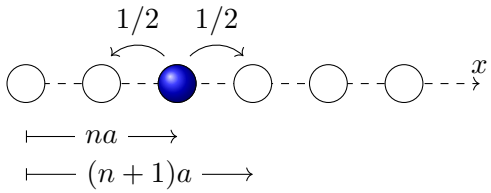


Fig 2. Schéma de la diffusion à l'échelle macroscopique.

1. Identifier la probabilité p que la particule ait fait q sauts vers la droite au bout d'un temps $N \times \tau$.
2. Exprimer q en fonction de N et n pour que ces q sauts correspondent à une position de la particule en $x = n \times a$.
3. Exprimer p en fonction de N et n.
4. On rappelle que lorsque $N \gg 1$, la formule de STIRLING s'écrit :

$$N! \simeq \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$$

5. Simplifier alors l'expression de p lorsque $N \gg n$.
6. Montrer que l'on retrouve alors une probabilité $p(x,t)$ dont l'expression est analogue à celle d'un problème de diffusion :

$$p(x,t) = \frac{2a}{\sqrt{4\pi D t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

avec D une constante à exprimer en fonction de a et de τ.

L'essentiel

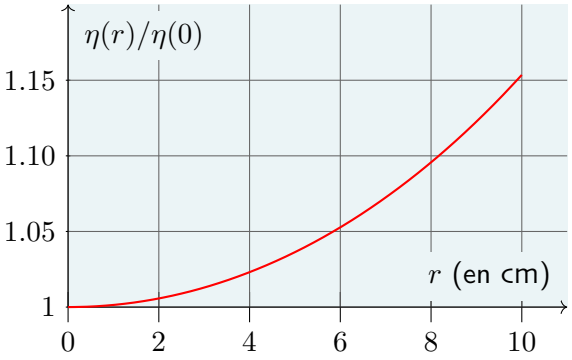
EXERCICE 4 Enrichissement d'uranium (⋆⋆)

Certains noyaux, appelés fissibles, peuvent se fissionner sous un bombardement de neutrons lents (vitesse $2,2$ km/s). L'uranium-235 est le seul isotope fissible naturel. Les réacteurs REP utilisent cette fission par neutrons lents et l'uranium, un mélange de $99{,}28\%$ d'uranium-238 et de $0{,}714\%$ d'uranium-235, est enrichi en uranium-235 pour améliorer le rendement. Le minerai d'uranium est d'abord transformé en hexafluorure d'uranium UF_6, qui est ensuite chauffé en vapeur et enrichi par centrifugation jusqu'à 3 à 5% en uranium-235. Après refroidissement et solidification, l'hexafluorure d'uranium est transformé en pastilles de combustible nucléaire.

Une centrifugeuse, constituée d'un cylindre de rayon $R \simeq 10,0$ cm et de hauteur $h \simeq 5,0$ cm, tourne autour de l'axe vertical Oz à une vitesse angulaire constante $\omega \simeq 50,000$ tr · min^{-1}. Le gaz d'hexafluorure d'uranium UF_6 est introduit dans le cylindre. Les molécules $^{235}_{92}UF_6$ et $^{238}_{92}UF_6$, ayant des masses différentes, se répartissent différemment, permettant de déterminer leur distribution spatiale.

Initialement, on considère un gaz parfait de particules de masse m, thermostatées à la température $T \simeq 353$ K. On note $p(M)$ la pression, $n^*(r)$ la densité particulaire, et $\rho(r)$ la masse volumique du gaz.

1. Faire un bilan des forces appliquées à un volume $d\tau$ de particules dans le référentiel lié au cylindre. On exprimera la résultante des forces de pression sous une forme volumique.
2. Justifier que le poids est négligeable par rapport à la force d'inertie d'entraînement.
3. Déduire de la condition d'équilibre relatif de la particule de fluide la répartition $n^*(r)$ des molécules dans le cylindre. On note $n^*(0)$ la répartition particulaire sur l'axe.
4. Montrer que la répartition $n^*(r)$ obéit à une statistique de BOLTZMANN.
5. On donne l'allure du rapport $\eta(r) = \frac{n^*_{238}(r)}{n^*_{235}(r)}$ des molécules $^{235}_{92}UF_6$ et $^{238}_{92}UF_6$ en fonction de r. En déduire le principe de base de l'enrichissement de l'uranium et expliquer le protocole permettant d'obtenir le gaz enrichi en $^{235}_{92}UF_6$. Préciser le nombre de centrifugeuses nécessaire pour enrichir l'uranium pour un usage civil.



EXERCICE 5 Loi de Curie (⋆⋆)

1. Expliquer qualitativement ce que l'on entend par « basse » et « haute » température dans un système à deux niveaux d'énergie $\epsilon = \pm\epsilon_0$.
2. Dans le modèle du paramagnétisme de BRILLOUIN, chacun des N atomes indépendants d'un solide de température T, placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$, possède alors une énergie magnétique $-\overrightarrow{\mu_z} \cdot \overrightarrow{B}$ où $\overrightarrow{\mu_z}$, projection du moment magnétique sur l'axe des z peut prendre les valeurs $\pm\mu$. Commenter les valeurs numériques suivantes : $\mu \simeq 10^{-23}$ A · m² et $B \simeq 1$ T. On donne $k_B \sim 10^{-23}$ J · K^{-1}.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

3. Quel est le moment magnétique moyen $\langle\mu\rangle$ du solide en projection sur l'axe des z en fonction du champ magnétique B et de la température T ? Approximer cette valeur aux hautes températures et commenter le résultat. Même question pour des forts champs magnétiques.
4. La loi de CURIE établie expérimentalement indique que le moment magnétique moyen est proportionnel au champ magnétique et inversement proportionnel à la température. Le modèle de BRILLOUIN est-il conforme à cette loi empirique ?
5. Pour certaines substances ferromagnétiques, le champ magnétique engendré par les atomes prend des valeurs notables et ne peut être négligé par rapport au champ extérieur $\overrightarrow{B}$. L'expression du moment magnétique moyen $\langle\mu\rangle$ est la même que précédemment à condition de remplacer B par $B + \lambda\langle\mu\rangle$ où λ est une constante. Grâce à une interprétation graphique, montrer que le moment magnétique μ_z est non nul même en l'absence de champ dans une certaine gamme de température.
6. Que se passe-t-il quand on chauffe un aimant ?

EXERCICE 6 Force de Keesom (⋆⋆)

Soient deux dipôles permanents dont les moments $\overrightarrow{p_A}$ et $\overrightarrow{p_B}$ sont portés par le même axe Ox, et distants de r. On fait l'hypothèse qu'il n'existe que deux orientations relatives possibles : soit $\overrightarrow{p_A}$ et $\overrightarrow{p_B}$ sont parallèles et de même sens, soit $\overrightarrow{p_A}$ et $\overrightarrow{p_B}$ sont parallèles et de sens contraire (dits aussi antiparallèles).

1. Exprimer le champ électrostatique créé par chaque dipôle sur l'autre.
2. Rappeler l'expression générale de la force qui s'exerce sur un dipôle de moment $\overrightarrow{p}$ plongé dans un champ extérieur non uniforme $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$. Exprimer dans chaque cas ($\overrightarrow{p_A}$ et $\overrightarrow{p_B}$ parallèles ou antiparallèles) la force $\overrightarrow{F}_+$ et $\overrightarrow{F}_-$ qui s'exerce entre les dipôles. On montrera que :

$$\overrightarrow{F}_+ = -\frac{6p_Ap_B}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\,\overrightarrow{u_x} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F}_- = -\overrightarrow{F}_+$$

3. On suppose que l'agitation thermique est assez forte pour faire passer sans cesse les dipôles d'une position à l'autre. Expliciter cette condition. Est-elle vérifiée à température ambiante ? (on prendra des moments dipolaires de l'ordre de grandeur du debye).
4. On note n_+ le nombre de dipôles tels que $\overrightarrow{p_A}$ et $\overrightarrow{p_B}$ sont parallèles, d'énergie potentielle $\mathcal{E}_p^+$ et n_- le nombre de ceux dont $\overrightarrow{p_A}$ et $\overrightarrow{p_B}$ sont antiparallèles, d'énergie potentielle $\mathcal{E}_p^-$. On admet que n_+ et n_- sont donnés par la loi statistique de BOLTZMANN :

$$n_+ = n_0\, e^{-\frac{\mathcal{E}_p^+}{\mathsf{k_B}T}} \quad \text{et} \quad n_- = n_0 e^{-\frac{\mathcal{E}_p^-}{\mathsf{k_B}T}}$$

Exprimer la force moyenne $\langle F\rangle$ qui s'exerce sur cette population de dipôles. On montrera qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\langle F\rangle = \tanh\left(\frac{2p_Ap_B}{4\pi\varepsilon_0 r^3 \mathsf{k_B}T}\right)\overrightarrow{F}_+ \qquad (1)$$

En déduire que dans les conditions où l'agitation thermique l'emporte sur l'alignement des dipôles, la force moyenne entre dipôles est attractive et décroît comme $\frac{1}{r^7}$. Cette force est appelée force de KEESOM.

Pour aller plus loin

EXERCICE 7 Charge d'écran de Debye (⋆⋆⋆)

On rappelle le laplacien en coordonnées sphériques pour un potentiel ne dépendant que de r :

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2\left(rV(r)\right)}{\mathrm{d}r^2}$$

On considère un milieu électriquement neutre, dans un état ionisé (un plasma par exemple), constitué de particules de charges $+q$ et $-q$, de densités particulaires moyennes égales à n_0. Soit une charge $+q$ de ce milieu au point O. La présence de cette charge modifie localement la répartition des charges positives et négatives, celles-ci prenant alors les densités particulaires $n_+(r)$ et $n_-(r)$ à la distance r du point O. Le milieu étant supposé à l'équilibre thermique à la température T, ces densités sont données par la loi statistique de BOLTZMANN, donc proportionnelles au facteur de BOLTZMANN en $e^{-\frac{\mathcal{E}_p}{\mathsf{k_B}T}}$, où $\mathcal{E}_p$ est l'énergie potentielle associée et $\mathsf{k_B}$ la constante de BOLTZMANN.

1. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge q placée en un point où règne le potentiel électrique V.
2. En considérant qu'à grande distance du point O, le milieu retrouve sa neutralité globale et que les densités tendent vers leur valeur commune n_0, exprimer les densités $n_+(r)$ et $n_-(r)$ en fonction de $V(r)$, q, $\mathsf{k_B}T$ et n_0.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(r)$.
4. On se place dans le cas où $qV \ll \mathsf{k_B}T$. Linéariser l'équation différentielle précédente et la mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2(rV)}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{\lambda_D^2}(rV) = 0$$

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

On exprimera λ_D en fonction des données et on justifiera le nom de « longueur » de DEBYE donné à λ_D. (Pour information, la longueur de DEBYE caractérise l'écrantage du potentiel coulombien de la charge $+q$ par les autres entités chargées du milieu).

5. Résoudre l'équation compte tenu du problème physique posé (on pensera à étudier le comportement de $V(r)$ si $r \to 0$).

EXERCICE 8 Diffusion d'un parfum (⋆⋆)

1. Estimer un ordre de grandeur de la vitesse moyenne v pour des particules de gaz à la température T. On prendra $T \simeq 300$ K et $M \simeq 50$ g · mol^{-1}.
2. Si on assimile les particules du gaz à des boules de diamètre d, estimer l'ordre de grandeur du diamètre d.
3. Pour un gaz de pression $p \simeq 1$ bar et de température T estimer un ordre de grandeur de la distance moyenne entre deux chocs de ces particules. Cette distance est appelée libre parcours moyen et se note ℓ.

Au temps $t = 0$, en un point O, un opérateur appuie sur un diffuseur de parfum.

4. Montrer que $r(t) = \sqrt{v\ell t}$.
5. À quelle distance moyenne $r(t)$ se trouve une particule de ce parfum à un instant t. En déduire au bout de combien de temps la particule se trouve en moyenne à 10 cm du diffuseur.

Viser l'X

EXERCICE 9 Fuite dans une cabine spatiale (⋆⋆)

Dans une cabine spatiale de volume $V_0 \simeq 10$ m^3 se trouve de l'air à la température $T_0 \simeq 298$ K constante. L'une des parois est percée d'un petit trou de section s, suffisamment petit pour ne pas perturber la distribution d'équilibre du gaz à un instant t donné.

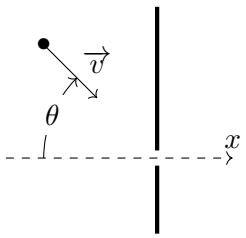


Fig 3. Particule sortant de la cabine.

On note $N(t)$ le nombre de molécules de gaz dans la cabine à l'instant t.

1. Dans quel volume dV sont contenus les atomes de vitesse $\vec{v}$ à d$\vec{v}$ près, qui vont sortir de la cabine pendant la durée dt ?
2. Quel est le nombre de ces atomes ? On utilisera la distribution de MAXWELL-BOLTZMANN .
3. Donner une équation différentielle satisfaite par $N(t)$.
4. Quelle est la durée pour que la cabine spatiale soit entièrement vidée de son air ? Proposer une application numérique pour un trou circulaire de dimension typique $0,1$ mm.

Données :

Masse moyenne d'une molécule d'air $9,6 \times 10^{-26}$ kg.
Constante de BOLTZMANN : $k_B \simeq 1,38 \times 10^{-23}$ J · K^{-1}.

EXERCICE 10 Para/ferromagnétisme (⋆⋆⋆)

On considère un bloc de fer que l'on modélise par un solide cristallin parfait. Ce solide cristallin peut s'agencer selon deux variétés allotropiques : cubique centrée (fer-α et fer-β) et cubique faces centrées (fer-γ). Dans le cas d'une maille cubique centrée, le fer existe sous deux états :

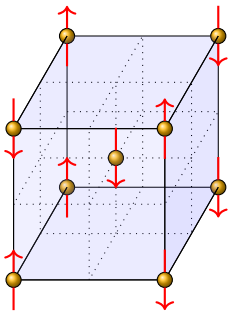


Fig 4. Fer-α et fer-β en maille cc.

La transition entre les deux états s'opère pour une température T_c appelée température de CURIE, de $T_c = 770$°C. En chauffant, le fer passe alors du fer-α, ferromagnétique, à du fer-β, paramagnétique.

PARTIE A : Étude du fer β ($T > T_c$) :

On modélise chaque atome de fer par un moment magnétique $\vec{\mu_i} = g\mu_B \vec{s_i}$ où g représente le facteur de LANDÉ, μ_B le magnéton de BOHR et $\vec{s_i} = \pm\frac{1}{2}\vec{u_z}$ le nombre magnétique de spin.

1. On plonge le cristal dans un champ magnétique vertical $\vec{B} = +B\,\vec{u_z}$. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_B$ d'un dipôle $\vec{\mu_i}$ plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$.
2. Montrer alors que chaque atome de fer ne peut prendre que deux niveaux d'énergie possible $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ dont on explicitera les expressions en fonction de g, μ_B et B et d'une constante $\mathcal{H}_0$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

Le cristal est constitué de N atomes identiques et indépendants placés sur des sites discernables.

3. Donner l'expression de l'énergie totale $\mathcal{H}$ du solide cristallin en fonction de $\mathcal{H}_0$, g, μ_B, N et B.
4. En utilisant la notation $\beta = \frac{1}{k_B T}$, exprimer la fonction de partition z d'un atome de fer. En déduire l'expression de la fonction de partition Z du bloc entier constitué des N atomes de fer.

On définit l'aimantation $\overrightarrow{M} = \frac{d\overrightarrow{\mu}}{d\tau} = M\,\overrightarrow{u_z}$ à partir de la fonction de partition Z par :

$$M = \frac{1}{\beta V}\frac{\partial \ln(Z)}{\partial B} \qquad (2)$$

avec V le volume du bloc de fer.

5. Montrer que l'aimantation M du matériau a pour expression :

$$M = M_0 \times \tanh(\alpha B)$$

avec M_0 et α deux constantes à exprimer en fonction des données du problème. Distinguer deux comportements du matériau en fonction de la valeur du champ magnétique B.

6. Montrer que la susceptibilité magnétique $\chi_M = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_{B=0}$ (μ_0 est la perméabilité du vide) varie en $\frac{1}{T}$ dans ce domaine de températures selon la loi de Curie.

PARTIE B : Étude du fer α ($T < T_c$) :

Dans cette partie, on suppose l'existence d'une interaction électrique à courte portée (terme de couplage J n'agissant que sur deux atomes voisins), de sorte que l'expression de l'énergie totale du solide cristallin devient :

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - J \sum_{\substack{i \neq j \\ \text{voisins}}} \overrightarrow{s_i} \cdot \overrightarrow{s_j}$$

Pour résoudre ce problème, P. Weiss propose en 1907 l'approximation de champ moyen qui précise que les effets de moyenne sont prédominants sur les fluctuations.

Pour chaque atome indicé k, on a donc $s_k - \langle s_k \rangle \ll \langle s_k \rangle$ et $M = \frac{N}{V} g \mu_B \langle s_k \rangle$.

7. Montrer qu'on peut alors simplifier l'expression précédente en écrivant :

$$\overrightarrow{s_i}.\overrightarrow{s_j} \simeq 2\frac{MV}{Ng\mu_B}s_i - \left(\frac{MV}{Ng\mu_B}\right)^2$$

8. Rappeler le nombre p de plus proches voisins (coordinence) dans le cas d'une maille cubique centrée. Simplifier alors l'expression de $\mathcal{H}'$ en notant :

$$\mathcal{H}_1 = N\mathcal{H}_0 - JN\left(\frac{MV}{Ng\mu_B}\right)^2$$

9. Montrer que la fonction de partition Z du bloc de fer peut s'écrire :

$$Z = 2^N \times \mathrm{ch}^N(\alpha B + \gamma M)$$

avec α et γ à exprimer en fonction des données du problème.

10. Identifier l'expression de l'aimantation M du bloc de fer. Déterminer l'équation d'autocohérence $M = f(M)$ en champ magnétique B nul. Retrouver l'expression de l'aimantation dans le cas d'un matériau paramagnétique ($J = 0$).
11. Représenter l'aimantation $M(T, B)$ et distinguer les deux cas (paramagnétique et ferromagnétique).

EXERCICE 11 Molécule d'ADN (⋆⋆⋆)

On modélise la molécule d'ADN comme une fermeture éclaire partiellement ouverte. Il y a N liaisons possibles : l'état ouvert est d'énergie nulle et l'état fermé d'énergie $\mathcal{E}$.

La molécule d'ADN est en équilibre thermodynamique avec son environnement à la température T.

1. Combien y a-t-il en moyenne de liaisons ouvertes dans la molécule ?

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/