Forces centrales (MP)

EXERCICE 1 Particule dans un cône (⋆⋆)

Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans un cône d'axe (Oz) vertical et de demi-angle au sommet valant α. À l'instant initial, il est lancé à l'altitude z_0 avec une vitesse horizontale $\vec{v_0} = v_0\,\vec{u_\theta}$.

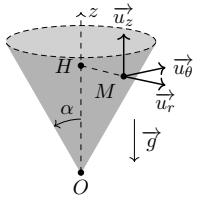


Fig 1. Base locale et bille dans le cône.

1. Pourquoi le point M contourne-t-il l'axe (Oz) en tournant toujours dans le même sens, et sans jamais tomber au fond du cône ?
2. En exprimant deux constantes du mouvement, justifier l'évolution du point entre deux altitudes extrêmes.
3. La trajectoire pourrait-elle être circulaire ?

EXERCICE 2 Chute d'un satellite (⋆⋆)

On considère un astre et un satellite gravitant autour de l'astre. La chute du satellite est étudiée.

1. Modéliser le phénomène.
2. Déterminer le temps de chute du satellite.

Changement de référentiel (MP)

EXERCICE 3 Bifurcation (⋆⋆)

Une bille M de rayon r et de masse m circule sans frotter dans une rainure tracée à l'intérieur d'un cerceau de rayon R, représenté sur la *Figure 2*. On met en rotation le cerceau autour de l'axe vertical $(O, \vec{u_z})$.

On considère que le référentiel dans lequel est posé le dispositif est le référentiel terrestre, supposé galiléen pour le temps de l'expérience.

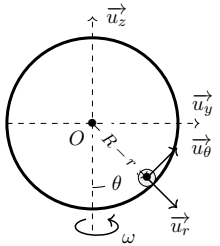
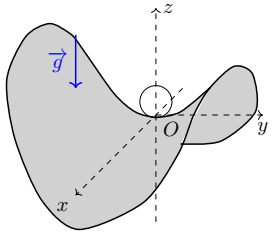


Fig 2. Cerceau en rotation.

1. Dans le référentiel tournant, lister les forces auxquelles est soumise la bille M. Calculer le travail élémentaire de ces forces.
2. En identifiant l'expression de l'énergie potentielle de la bille, déterminer sa ou ses position(s) d'équilibre en fonction de la vitesse de rotation ω. Identifier une vitesse de rotation critique ω_c où la bille change de comportement.
3. Tracer les positions d'équilibre de la bille en fonction de ω et identifier s'il s'agit de positions d'équilibre stable ou instable.
4. Pourquoi appelle-t-on ce dispositif un « bifurcateur » ?

EXERCICE 4 Bille sur une selle de cheval (⋆⋆)

Une balle, traitée comme un point matériel de masse m et non chargée, peut se déplacer sur une surface courbée. Le rayon de courbure est $R > 0$ dans la direction x et $-R < 0$ dans la direction y, la direction z correspondant à la verticale. Dans l'approximation des faibles pentes, le mouvement est décrit dans le plan (x, y).



Dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\,\vec{u_z}$, la balle est soumise au potentiel effectif :

$$U(x,y) = \frac{mg}{2R}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 - y^2) \qquad (1)$$

avec $\omega^2 = \frac{g}{R}$.

La surface est mise en rotation uniforme autour de l'axe Oz, à la vitesse angulaire constante Ω, par rapport au référentiel galiléen du laboratoire $\mathcal{R}_0$. On décrit le mouvement dans le référentiel tournant $\mathcal{R}$ solidaire de la surface.

1. Rappeler les forces d'inertie s'exerçant sur une particule de position $\vec{r}$ et de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel tournant de vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{u_z}$.
2. Écrire les équations du mouvement pour les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ dans $\mathcal{R}$.
3. Chercher les solutions de la forme $x(t) = x_0 e^{rt}$ et $y(t) = y_0 e^{rt}$ et en discuter la stabilité.
4. Représenter le diagramme de stabilité dans le plan (Ω, ω).

Frottement (MP)

EXERCICE 5 Chute de cheminée (⋆⋆)

On considère une cheminée de hauteur ℓ et de moment d'inertie $J = \frac{m\ell^2}{3}$ au point de contact avec le sol.

1. Proposer une modélisation et établir l'équation du mouvement avant que la cheminée ne casse.
2. Obtenir l'expression d'une intégrale première du mouvement.

Les efforts internes à une distance $u = \xi\ell$ ($\xi \in [0,1]$) sont :

- Effort de traction : $N(\theta,\xi) = mg\left(\frac{1}{4} - \xi + \frac{3}{4}\xi^2\right)\sin(\theta)$
- Effort de cisaillement : $T(\theta,\xi) = mg\left(\left(-\frac{5}{2} + \xi + \frac{3}{2}\xi^2\right)\cos(\theta) + \frac{3}{2}\left(1 - \xi^2\right)\right)$
- Moment de flexion : $M(\theta,\xi) = -\frac{mg\ell}{4}(\xi - 1)^2\,\xi\sin(\theta)$



Fig 3. Dynamitage des cheminées de cokerie de Carling (Moselle).

3. Préciser par quelle sollicitation casse-t-on habituellement un morceau de sucre ? (traction, cisaillement, torsion ou flexion).
4. L'action maximale supportée par la cheminée est Γ_m. Déterminer l'angle de cassure. Où la cheminée se rompt-elle ?
5. Discuter les hypothèses et la modélisation en fonction de la photo de la *Figure 3*.
6. Démontrer les expressions de $N(\theta)$, $T(\theta)$ et $M(\theta)$.

Forces centrales (MP⋆)

EXERCICE 6 Champ de force central (⋆⋆⋆)

On considère un champ de force central en O de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^n}\,\vec{u_r}$$

avec O fixe dans le référentiel d'étude (supposé galiléen) et $\vec{u_r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}$.

1. Déterminer les orbites circulaires possibles.
2. S'agit-il d'orbites circulaires stables ?
3. Qu'en est-il si $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}e^{-\frac{r}{a}}\,\vec{u_r}$ avec $(k,a) \in [0;+\infty[^2$.

EXERCICE 7 Périhélie de Mercure (⋆⋆⋆)

Mercure, la planète du système solaire la plus proche du Soleil, ne vérifie pas exactement la première loi de Kepler. Son périhélie dévie d'une vitesse angulaire $\Omega \simeq 42,99$ secondes d'arc par siècle.

1. Montrer que ce résultat peut être retrouvé en ajoutant une perturbation de la forme :

$$V(r) = -\frac{m\gamma}{r^3}$$

au potentiel newtonien, avec $\gamma = \frac{\mathcal{G}^2M^2a}{c^2}(1 - e^2)$ et m la masse de Mercure.

Données :

- Masse du Soleil : $M \simeq 1,989 \times 10^{30}$ kg
- Demi-grand axe de l'orbite de Mercure : $a \simeq 5,7909 \times 10^{10}$ m
- Excentricité de l'orbite de Mercure : $e \simeq 0,2056$
- Constante gravitationnelle : $\mathcal{G} \simeq 6,67430 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}
- Vitesse de la lumière : $c \simeq 2,99792458 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}

EXERCICE 8 Effondrement de l'atome (⋆⋆⋆)

1. Dans le modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène, que peut-on dire de la puissance rayonnée par l'électron ?

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/

2. En déduire un ordre de grandeur du temps de vie de l'atome, en tenant compte des pertes d'énergie par rayonnement de l'électron.

Changement de référentiel (MP*)

EXERCICE 9 Tir raté (⋆⋆)

Lors d'une bataille au large des îles Malouines (à l'Est de l'Argentine) entre les flottes anglaises et allemandes (distantes de 10 à 30 km), pendant la Première Guerre mondiale, les Anglais ont raté leur tir d'environ 100 m alors qu'ils réussissaient leurs tests en Angleterre.

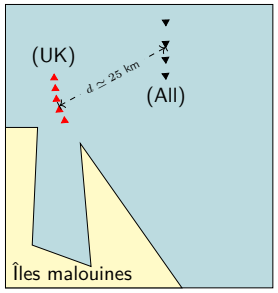


Fig 4. Schéma de la bataille.

1. Donner une explication à ce phénomène.

- Latitude de Londres $54°$.
- Latitude des îles Malouines $-51°$.

EXERCICE 10 Longue corde (⋆⋆)

1. Peut-on trouver sur Terre un lieu où une très longue corde pourrait rester verticale, immobile par rapport au sol, sans être fixée à ses extrémités ?
2. S'il rompt, où rompt-il ?

Frottement (MP*)

EXERCICE 11 Chute de cheminée (⋆⋆)

Lorsqu'une cheminée industrielle bascule puis s'écroule, on remarque qu'elle se casse toujours au même endroit.



Fig 5. Dynamitage des cheminées de cokerie de Carling (Moselle).

1. Pourquoi ?

EXERCICE 12 Carambollage (⋆⋆)

On considère une chaîne de voitures de masse m distants de ℓ et à l'arrêt dans le référentiel terrestre. Les roues sont freinées et chaque voiture se comporte comme un solide déformable qui reste collé à la masse en mouvement après collision.

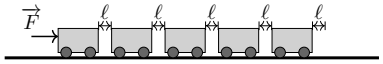


Fig 6. Chaîne de solides équidistants.

Le premier solide est soumis à une force $\vec{F}$.

1. Étudier le mouvement de chaque solide en l'absence de frottement puis en les considérant.

Document sous licence Creative Commons « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».
Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/